



**Carla Alexandra
Moreira Pinto**

Soluções da Equação de Onda Unidimensional



Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2013

**Carla Alexandra
Moreira Pinto**

Soluções da Equação de Onda Unidimensional

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática para Professores, realizada sob a orientação científica do Doutor Eugénio Rocha, Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

o júri

presidente

Prof. Doutor Vasile Staicu

professor catedrático do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Prof. Doutor Fernando Augusto Pinto Miranda

professor auxiliar da Universidade do Minho

Prof. Doutor Eugénio Alexandre Miguel Rocha.

professor auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

agradecimentos

Ao Professor Doutor Eugénio Rocha por todo o apoio e orientação prestados.

palavras-chave

Equações diferenciais parciais, equação de onda, condições de fronteira, condições iniciais.

resumo

A descrição da propagação de ondas requer o estudo das soluções das equações diferenciais parciais hiperbólicas. Nesta tese, apresentamos um estudo de um dos exemplos mais representativos destas equações, a equação de onda unidimensional. As soluções da equação de onda são determinadas de forma analítica e numérica, tendo em conta condições de fronteira assim como condições iniciais.

keywords

Partial differential equations, wave equation, boundary conditions, initial conditions.

abstract

The description of wave propagation requires the study of the solutions of hyperbolic partial differential equations. In this thesis, a study of one of the most representative examples of these equations is presented, the one-dimensional wave equation. The solutions of the wave equation are determined analytically as well as numerically, taking into account boundary and initial conditions.

Conteúdo

Conteúdo	i
Lista de Figuras	v
1 Introdução	1
2 Equações diferenciais parciais	3
2.1 Introdução às equações diferenciais	3
2.2 Forma geral de equações diferenciais parciais	4
2.3 Classificação de EDPs de 2ª ordem em duas variáveis independentes	6
2.3.1 Exemplos de equações diferenciais parciais	8
2.4 Forma canónica para equações diferenciais de 2ª ordem	9
3 A equação de onda	18
3.1 A equação de onda em \mathbb{R}	18
3.1.1 Método 1: derivada da função composta	19
3.1.2 Método 2: método das características para EDPs de 1ª ordem	20
3.1.3 Método 3: mudança de variáveis	23
3.1.4 Método 4: separação das variáveis	25
3.1.5 Método 5: transformada de Fourier	28
3.2 Termos de ordem inferior a 2 na equação de onda	30
3.2.1 Equação do telégrafo	31

4	Condições de fronteira/iniciais para a equação de onda unidimensional	35
4.1	Condições iniciais e a fórmula de D'Alembert	36
4.2	Condições de fronteira	38
4.2.1	Corda com extremidades fixas	38
4.2.2	Corda com extremidades livres	42
4.2.3	Anéis e condições de fronteira periódicas	43
4.2.4	Outras condições de fronteira	47
4.3	Fórmula de D'Alembert e o método da reflexão	47
4.3.1	Corda com uma extremidade fixa	47
4.3.2	Corda com duas extremidades fixas	49
5	Métodos numéricos	50
5.1	Método das diferenças finitas	51
5.2	Aplicação à equação de onda unidimensional	54
5.2.1	Corda infinita inicialmente em repouso	55
5.2.2	Corda infinita com velocidade inicial	56
5.2.3	Aplicação à corda com extremidades fixas	58
6	Conclusão	61
A	Códigos do Mathematica	63
A.1	Caso 1: corda infinita largada do repouso	63
A.2	Caso 2: corda infinita esticada com velocidade inicial	64
A.3	Método das diferenças finitas com velocidade inicial e extremidades fixas	65
A.4	Método das diferenças finitas para a corda inicialmente em repouso	67
A.5	Método das diferenças finitas para a corda com velocidade inicial	69
B	Princípio da sobreposição	72
C	Método das características	74
C.1	Curvas características para EDPs de 1ª ordem homogêneas	74

C.2	Curvas características para EDPs de 1ª ordem não homogêneas	77
Bibliografia		80

Lista de Figuras

2.1	Classificação da equação diferencial 2.5 no plano xy	7
2.2	Secções cónicas que traduzem a classificação das equações diferenciais parciais de segunda ordem lineares em duas variáveis independentes.	7
3.1	Gráficos de um perfil aproximadamente gaussiano em vários instantes de acordo com a evolução dada pela equação de onda.	20
4.1	Geometria da corda em forma de anel que traduz a existência de condições de fronteira periódicas.	44
5.1	Segmentos correspondentes à diferença central (\overline{AB}) , diferença progressiva (\overline{BP}) e diferença regressiva \overline{PA}	52
5.2	Malha bidimensional utilizada no método das diferenças finitas para uma função $u(x, t)$	53
5.3	Solução exata da equação de onda no caso da corda infinita inicialmente em repouso. Inicialmente, temos um único impulso de amplitude 1, que mais tarde se divide em dois impulsos que se movem em sentido contrário com uma velocidade 1 e de amplitude $\frac{1}{2}$	57
5.4	Solução para a equação de onda pelo método das diferenças finitas no caso da corda infinita inicialmente em repouso. Os erros numéricos originam pequenas oscilações.	57

5.5 Solução exata da equação de onda no caso da corda infinita inicialmente esticada e com velocidade inicial $g(x) = e^{-x^2}$ 58

5.6 Solução para a equação de onda pelo método das diferenças finitas no caso da corda infinita com velocidade inicial. Neste caso, os erros numéricos são menos evidentes. 59

5.7 Soluções obtidas pelo método das diferenças finitas no caso da corda com extremidades fixas esticada no instante $t = 0$ e com velocidade inicial $g(x) = \text{sen}(4\pi x)$ 60

C.1 Curvas características. 75

Capítulo 1

Introdução

O objetivo deste trabalho é o estudo das equações diferenciais parciais (EDP) hiperbólicas, em particular, a equação de onda unidimensional. Estas equações surgem em múltiplos contextos das várias áreas do saber. O exemplo mais conhecido de uma EDP hiperbólica é a equação de onda que permite ilustrar algumas das características comuns às várias EDPs hiperbólicas. Em geral, as soluções de uma EDP hiperbólica têm o comportamento de ondas progressivas (assumindo que uma das variáveis independentes é o tempo), isto é, se num certo instante inicial a solução da EDP apresenta uma perturbação (por exemplo um pico) numa certa região, esta perturbação irá afetar o comportamento da solução em outras regiões em instantes diferentes consoante a distância dessas regiões à posição inicial da perturbação. Esta característica distingue, de certo modo, as EDPs hiperbólicas das EDPs elípticas e parabólicas.

O conhecimento das soluções da equação de onda unidimensional tem particular relevância no estudo de movimentos oscilatórios unidimensionais, por exemplo, a vibração de uma corda. Estas soluções podem ser obtidas exatamente utilizando várias técnicas como a análise de Fourier, mesmo se termos de ordem inferior existirem na equação de onda. A imposição de condições de fronteira introduz alguma complexidade adicional e limita o conjunto de soluções possíveis. No caso da equação de onda unidimensional a existência de condições iniciais garante a existência de uma solução única dada pela fór-

mula de D'Alembert. Em alternativa aos métodos teóricos, podemos recorrer a métodos numéricos para obter a solução da equação de onda. Estes métodos são particularmente importantes em situações em que a solução exata não é conhecida, por exemplo devido à presença de termos não lineares. Um dos métodos mais utilizado é o método das diferenças finitas. A desvantagem destes métodos é a existência de erros numéricos, embora possam ser reduzidos aumentando o número de passos computacionais quando se tem garantida a convergência do método utilizado.

Esta tese está organizada em 6 capítulos e 3 apêndices. No capítulo 2, introduzimos a classificação de equações diferenciais parciais de 2ª ordem em duas variáveis independentes nomeadamente hiperbólicas, elípticas e parabólicas. Mostramos que estas EDPs se podem escrever numa forma mais simples, designada por forma canónica que no caso das equações hiperbólicas, é uma equação de onda. No capítulo 3, o caso da equação de onda unidimensional e os vários métodos para encontrar a solução geral desta equação são estudados. Utilizando o exemplo da equação do telégrafo, discutimos também o efeito de termos de ordem inferior. No capítulo 4, mostramos como obter a solução da equação de onda na presença de condições de fronteira e condições iniciais. Em particular, mostramos como obter a fórmula de D'Alembert para a equação de onda unidimensional com condições iniciais de Cauchy. A solução da equação de onda no caso de vibrações de uma corda submetida a diferentes condições da fronteira é obtida utilizando o método da separação. Generalizamos também a fórmula de D'Alembert para problemas com condições de fronteira, utilizando o método das reflexões. No capítulo 5, introduzimos o método das diferenças finitas e aplicamos este método à equação de onda unidimensional em várias situações. As soluções numéricas são comparadas com as soluções exatas. No capítulo 6, apresentamos a conclusão da tese. Nos apêndices, mostramos os códigos utilizados no método das diferenças finitas, descrevemos o princípio da sobreposição e o método das características.

Capítulo 2

Equações diferenciais parciais

Neste capítulo, descrevemos algumas noções básicas sobre equações diferenciais parciais, introduzimos a classificação de equações diferenciais parciais de 2ª ordem em duas variáveis independentes e mostramos como reduzir estas EDPs à sua forma canónica. Em particular, as equações hiperbólicas na sua forma canónica podem-se reescrever como uma equação de onda, mais termos de ordem inferior.

2.1 Introdução às equações diferenciais

O estudo das equações diferenciais iniciou-se simultaneamente com a invenção da Análise Matemática por Newton e Leibniz na segunda metade do século XVII. O seu desenvolvimento esteve sempre intimamente relacionado com problemas físicos, originalmente colocadas no âmbito da Mecânica, da Óptica, da Geometria, da Biologia, além, obviamente, de razões intrínsecas à própria Matemática.

Uma **equação diferencial** é uma equação que envolve uma função incógnita e as suas derivadas. As equações diferenciais dividem-se relativamente à dimensão do domínio onde estão definidas em duas classes, de acordo com o número de variáveis de que depende a função desconhecida. Uma equação diferencial é chamada **ordinária** se a função incógnita depende apenas de uma variável independente. Se a função incógnita depende de mais de

uma variável independente temos uma equação diferencial parcial ou equação de derivadas parciais.

Chama-se **equação diferencial (ordinária) linear** de ordem n na função incógnita y e na variável independente x , a uma equação do tipo

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (2.1)$$

onde as funções $a_j(x)$ ($j = 0, 1, 2, \dots, n$) e $g(x)$ supõem-se conhecidas. As equações que não podem ser postas sob a forma da Eq. 2.1, dizem-se **não lineares**. Uma equação diferencial diz-se **homogênea** se $g(x) = 0$ para todo x , caso contrário dir-se-á **não homogênea** ou **completa**. De um modo geral, esta equação com a_0, a_1, \dots, a_n constantes reais, $a_n \neq 0$, chama-se **equação diferencial (ordinária) linear de ordem n de coeficientes constantes**.

2.2 Forma geral de equações diferenciais parciais

Numa **equação diferencial** quando a função incógnita depende de mais de uma variável independente (x_1, x_2, \dots, x_n) e das derivadas parciais de uma função incógnita (variável dependente que queremos determinar) $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ temos uma **equação diferencial parcial** ou **equação de derivadas parciais**, de n variáveis independentes, do tipo:

$$F \left(x_1, x_2, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \dots \right) = 0, \quad (2.2)$$

onde $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$, Ω é um domínio aberto de \mathbb{R}^n , F é uma função dada e $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é a função que se pretende determinar.

A ordem de uma equação diferencial parcial é dada pela derivada parcial de maior ordem da equação e, à semelhança das equações diferenciais ordinárias, uma equação diferencial parcial é **linear** se é de primeiro grau na função desconhecida e nas suas derivadas parciais e é **homogênea** se o termo que não contém a variável dependente é nulo, caso contrário

diz-se **não homogênea**. Uma solução de uma equação diferencial parcial é uma função que verifica identicamente a equação.

São exemplos de equações diferenciais de derivadas parciais de segunda ordem:

- a equação de onda unidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

- a equação de onda bidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

- a equação de calor unidimensional

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

- a equação de Laplace bidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

- a equação de Poisson bidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y),$$

em que c é constante, t é o tempo, x, y são variáveis e f é uma função não nula.

2.3 Classificação de EDPs de 2ª ordem em duas variáveis independentes

Consideremos um domínio aberto Ω de \mathbb{R}^2 e pontos $(x, y) \in \Omega$. A forma geral de uma equação parcial de primeira ordem, linear é

$$D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G. \quad (2.3)$$

onde D , E , F e G são funções de x e y .

A forma geral de uma equação diferencial parcial de segunda ordem linear em duas variáveis independentes x e y é

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G, \quad (2.4)$$

onde A , B , C , D , E , F e G são funções de x e y . Se $G(x, y) = 0$, a equação é homogênea.

As equações diferenciais parciais de segunda ordem classificam-se em três tipos [9]:

- **Parabólicas:** $B^2 - 4AC = 0$;
- **Elípticas:** $B^2 - 4AC < 0$;
- **Hiperbólicas:** $B^2 - 4AC > 0$.

Por exemplo, a equação

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (2.5)$$

é elíptica na região onde $x^2 - y^2 < 0$, parabólica ao longo das linhas $x^2 - y^2 = 0$, e hiperbólica na região onde $x^2 - y^2 > 0$ (ver Fig. 2.1).

A analogia nesta classificação de EDPs com as secções cónicas (intersecção de um plano e de um cone de revolução) é clara. As secções cónicas são representadas por equações de 2º grau em x e em y

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (2.6)$$

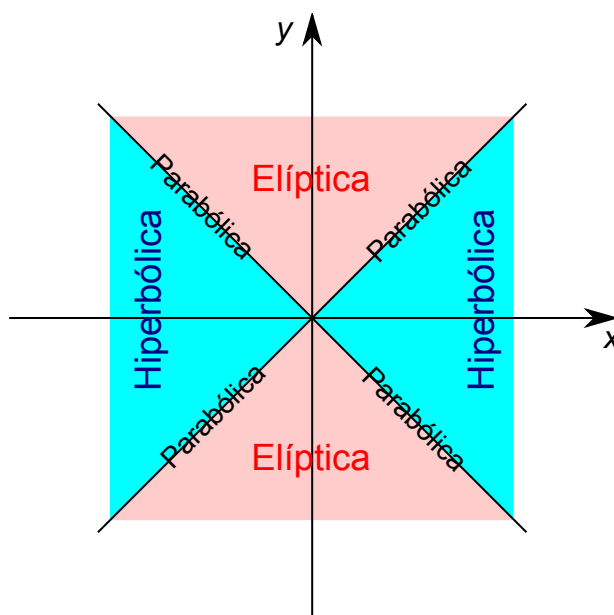


Figura 2.1: Classificação da equação diferencial 2.5 no plano xy .

e as relações anteriores entre A , B e C definem: elipses, parábolas, e hipérboles (ver Fig. 2.2).

Tal como no caso das secções cónicas, em que uma mudança de variáveis (que traduz uma rotação do sistema de eixos de forma que os eixos de simetria da secção cónica sejam paralelos aos eixos coordenados) reduz a equação quadrática a uma forma mais simples (com $B = 0$), é possível com uma mudança de variáveis eliminar o termo $B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ na expressão geral de uma EDP, da forma da Eq. 2.4, e dessa forma obter a EDP na sua

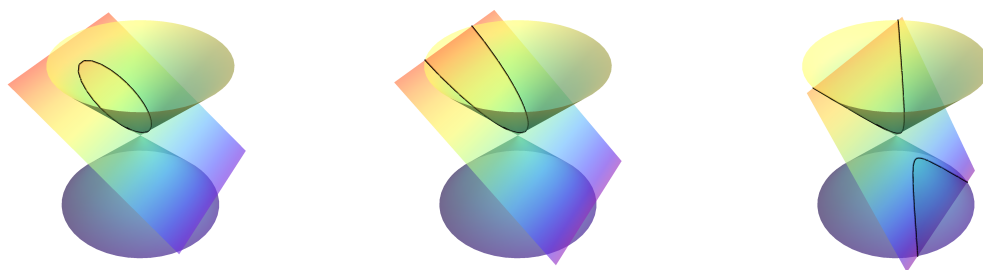


Figura 2.2: Secções cónicas que traduzem a classificação das equações diferenciais parciais de segunda ordem lineares em duas variáveis independentes.

forma canónica. Quando $B = 0$ (forma canónica) e A e C do mesmo sinal a equação é elíptica; $A = 0$ ou $C = 0$ a equação é parabólica; e A e C de sinais contrários a equação é hiperbólica.

2.3.1 Exemplos de equações diferenciais parciais

Nesta secção, apresentamos exemplos dos três tipos de EDPs assim como alguns contextos em que estas EDPs surgem.

A equação da difusão,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad c > 0,$$

é um exemplo de uma EDP parabólica. A noção de difusão traduz-se no fluxo de uma quantidade de uma região de maior concentração para uma região de menor concentração e surge na Física (difusão de partículas, energia, etc), Química, Biologia (difusão de moléculas), Economia (difusão de preços ou valores), etc.

A equação de Laplace bidimensional,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

é um caso muito estudado de uma EDP elíptica. As soluções da equação de Laplace são designadas funções harmónicas e são importantes em muitos ramos da ciência, por exemplo em eletromagnetismo ou em dinâmica de fluidos.

A equação de onda unidimensional,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

é um dos exemplos mais simples de uma EDP hiperbólica e as suas soluções descrevem a propagação de ondas acústicas, eletromagnéticas, elásticas, etc.

A classificação das EDPs permite seleccionar os métodos numéricos mais apropriados para a determinação das respectivas soluções.

2.4 Forma canónica para equações diferenciais de 2ª ordem

As três equações diferenciais referidas na secção anterior, são de particular interesse não só porque derivam de princípios físicos, mas porque qualquer equação linear da forma da Eq. 2.4 pode ser reduzida a uma das três equações anteriores utilizando uma mudança de variáveis [9, 13].

Teorema 1. *Recorrendo a uma transformação das variáveis independentes, qualquer equação da forma*

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G \quad (2.7)$$

pode ser reduzida a uma das seguintes formas:

- *Parabólicas: se $B^2 - 4AC = 0$, a equação reduz-se a*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dots = 0.$$

- *Elípticas: se $B^2 - 4AC < 0$, a equação reduz-se a*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dots = 0.$$

- *Hiperbólicas: se $B^2 - 4AC > 0$, a equação reduz-se a*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dots = 0.$$

onde ... representa os termos de ordem inferior.

Demonstração. Na demonstração deste teorema iremos considerar apenas o caso da **equação hiperbólica**, que é o tema desta tese e assumir coeficientes constantes. Vamos considerar, para simplificar a demonstração que $D = E = F = 0$ e estudar dois casos particulares,

$A = 1$ e $A = 0$, que são suficientes para provar o caso geral, pois a EDP com $A \neq 1$ e não nulo pode ser reduzida a $A = 1$, dividindo a EDP por A . Os passos seguidos no caso geral (com D , E e F não nulos) são os mesmos.

Considerando $A = 1$ e $D = E = F = G = 0$, podemos escrever a Eq. 2.4 como

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{B}{2} \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u - \left(\left(\frac{B}{2}\right)^2 - C\right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (2.8)$$

uma vez que

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{B}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{B}{2} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} + \left(\frac{B}{2}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u - \left(\left(\frac{B}{2}\right)^2 - C\right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{B}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{B}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \left(\frac{B}{2}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{B}{2}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \end{aligned}$$

Neste último passo, utilizamos o teorema de Clairaut-Schwarz segundo o qual se as derivadas parciais mistas $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ forem contínuas num ponto (x, y) , então são iguais [10].

Pretendemos encontrar ξ e η , variáveis tais que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} &= \frac{\partial}{\partial x} + \frac{B}{2} \frac{\partial}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial \eta} &= \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 - C} \frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

de modo a reescrever a Eq. 2.8 na forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0.$$

Estas novas variáveis ξ e η verificam as relações:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \xi} &= 1, & \frac{\partial x}{\partial \eta} &= 0, \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \frac{B}{2}, & \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 - C}.\end{aligned}$$

Isto é,

$$x = \xi, \quad y = \left(\frac{B}{2}\right)\xi + \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 - C}\eta,$$

logo

$$\xi = x, \quad \eta = \left[\left(\frac{B}{2}\right)^2 - C\right]^{-\frac{1}{2}} \left[-\left(\frac{B}{2}\right)x + y\right].$$

Com esta mudança de variável, temos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0.$$

Esta é a equação de onda unidimensional, com velocidade $c = 1$. A velocidade c pode ser reintroduzida na equação fazendo a mudança de variável $\tilde{x} = c\eta$ e $\tilde{t} = \xi$ ou $\tilde{x} = \eta$ e $\tilde{t} = \xi/c$.

Consideremos agora $A = 0$. Como $B^2 - 4AC > 0$, temos que $B \neq 0$ e a Eq. 2.4 é da forma

$$B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Leftrightarrow \left[B \frac{\partial}{\partial x} + C \frac{\partial}{\partial y} \right] \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Pretendemos encontrar ξ e η , variáveis tais que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \xi} &= B \frac{\partial}{\partial x} + C \frac{\partial}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial y},\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \xi} &= B, & \frac{\partial x}{\partial \eta} &= 0, \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= C, & \frac{\partial y}{\partial \eta} &= 1,\end{aligned}$$

e integrando estas relações obtemos

$$\begin{cases} x = B\xi, \\ y = C\xi + \eta, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi = \left(\frac{1}{B}\right)x, \\ \eta = -\left(\frac{C}{B}\right)x + y, \end{cases}$$

e a nossa equação será

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Esta equação é conhecida como a **forma canónica das equações hiperbólicas** a duas dimensões.

Finalmente, vamos transformar a nossa equação na sua forma canónica introduzindo duas novas variáveis $\tilde{\xi}$ e $\tilde{\eta}$ tais que

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{\eta}},$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}} - \frac{\partial}{\partial \tilde{\eta}},$$

isto é,

$$\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \xi} = 1, \quad \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \eta} = 1,$$

$$\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \xi} = 1, \quad \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \eta} = -1.$$

Integrando estas relações, temos

$$\tilde{\xi} = \xi + \eta,$$

$$\tilde{\eta} = \xi - \eta,$$

e obtemos a nossa equação

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{\eta}} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}} - \frac{\partial}{\partial \tilde{\eta}} \right) u = 0,$$

ou

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tilde{\xi}^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\eta}^2} \right) u = 0.$$

A demonstração para a equação parabólica e equação elíptica é feita de modo análogo.

□

A demonstração anterior é simples, mas vamos apresentar uma outra demonstração mais geral (equivalente para o caso estudado) baseada no método das características para EDPs de 2ª ordem [4, 9].

Demonstração. Pretendemos reduzir a EDP, Eq. 2.7, à sua forma canónica, fazendo uma mudança de variável da seguinte forma:

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y), \\ \eta = \eta(x, y), \end{cases} \quad (2.10)$$

com

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (2.11)$$

e em que as derivadas das funções componente da função composta (regra da cadeia) são:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}.$$

Derivando as expressões anteriores, obtemos as derivadas de segunda ordem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \dots,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \dots,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \dots,$$

onde \dots representa os termos de ordem inferior. Assim, podemos reescrever a nossa equação como

$$A^* \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + B^* \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + C^* \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + I^* \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0,$$

em que

$$A^* = A \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + B \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + C \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2, \quad (2.12)$$

$$B^* = 2A \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + B \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + 2C \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad (2.13)$$

$$C^* = A \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + B \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + C \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2. \quad (2.14)$$

Podemos formar o discriminante para a equação da seguinte forma:

$$\Delta^* = (B^*)^2 - 4A^*C^*. \quad (2.15)$$

O discriminante da equação de novas variáveis pode ser reescrito utilizando o discriminante

da equação original da seguinte forma

$$\Delta^* = J^2 \Delta,$$

onde J é o determinante Jacobiano da mudança de variáveis considerada. Esta relação implica que os sinais de Δ e Δ^* coincidem, isto é, se uma EDP é por exemplo hiperbólica, após a mudança de variáveis é também hiperbólica. Vamos então fazer uma transformação em que dois ou mais coeficientes de segunda ordem desapareçam, reduzindo a equação a uma forma mais simples. Vamos assumir que os coeficientes A , B e C são constantes.

Note-se que a expressão (2.12) para A^* é igual à expressão (2.14) para C^* se substituirmos a variável ξ pela variável η . Assim podemos representar as duas expressões por uma única, onde a variável ζ é a variável ξ ou a variável η , respetivamente para A^* e C^* . Assim $A^* = 0$ e $C^* = 0$ implica

$$A \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + B \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + C \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 = 0.$$

As soluções desta equação são as curvas características para as equações diferenciais parciais de segunda ordem. Dividindo ambos os membros da equação por $\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2$, obtemos

$$A \left(\frac{\frac{\partial \zeta}{\partial x}}{\frac{\partial \zeta}{\partial y}} \right)^2 + B \left(\frac{\frac{\partial \zeta}{\partial x}}{\frac{\partial \zeta}{\partial y}} \right) + C = 0.$$

Podemos assumir $A \neq 0$ porque se $A = 0$ e $C \neq 0$ consideramos $\frac{\partial \zeta}{\partial y} / \frac{\partial \zeta}{\partial x}$ em vez de $\frac{\partial \zeta}{\partial x} / \frac{\partial \zeta}{\partial y}$ e o procedimento é análogo. Se $A = 0$ e $C = 0$, a nossa equação está na sua forma canónica.

Pretendemos encontrar novas variáveis $\xi(x, y)$ e $\eta(x, y)$, que definem curvas $\xi(x, y) = \text{const}$ e $\eta(x, y) = \text{const}$, e tais que a equação diferencial parcial escrita à custa destas variáveis apenas tem o termo de segunda ordem correspondente à derivada mista. Ao longo destas curvas temos

$$d\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx + \frac{\partial \zeta}{\partial y} dy = 0,$$

então o declive da curva da característica é dada por

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial \zeta}{\partial x}}{\frac{\partial \zeta}{\partial y}},$$

e substituindo obtemos

$$A \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - B \left(\frac{dy}{dx} \right) + C = 0,$$

a equação quadrática com duas, uma ou zero soluções, dependendo do sinal do discriminante, $\Delta = B^2 - 4AC$, cuja solução é dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{\Delta}}{2A}.$$

Quando $\Delta > 0$, temos uma equação hiperbólica com duas famílias de curvas características. Integrando, obtemos

$$y = \frac{B \pm \sqrt{\Delta}}{2A}x + c \Leftrightarrow \frac{B \pm \sqrt{\Delta}}{2A}x - y = c.$$

onde c é uma constante de integração. Consideremos as seguintes variáveis

$$\begin{cases} \xi = \frac{B + \sqrt{\Delta}}{2A}x - y, \\ \eta = \frac{B - \sqrt{\Delta}}{2A}x - y, \end{cases} \quad (2.16)$$

Com esta mudança de variáveis, $A^* = C^* = 0$ e

$$\begin{aligned} B^* &= A \left(\frac{B^2 - (B^2 - 4AC)}{4A^2} \right) + B \left(-\frac{B}{2A} - \frac{B}{2A} \right) + 2C \\ &= 4C - \frac{B^2}{A} \\ &= -\frac{\Delta}{A} \neq 0. \end{aligned}$$

Dividindo a equação

$$B^* \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + I^* \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0$$

por B^* obtemos a equação reduzida

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \dots = 0.$$

Esta equação leva à forma canónica das equações hiperbólicas. Fazendo as transformações ortogonais

$$\begin{cases} x' = \xi + \eta, \\ y' = \xi - \eta, \end{cases} \quad (2.17)$$

obtemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} + \dots = 0,$$

como mostramos na primeira demonstração. Esta é a **forma canónica de grau dois das equações hiperbólicas**. De salientar que esta equação tem a forma da equação de onda (com $c = 1$).

□

Capítulo 3

A equação de onda

No capítulo anterior, mostramos que as equações diferenciais parciais de segunda ordem que pertencem à classe das equações hiperbólicas se podem reescrever como uma equação de onda, mais termos de ordem inferior. Neste capítulo, vamos discutir em detalhe o caso da equação de onda unidimensional e os vários métodos para encontrar a solução geral desta equação. As soluções da equação de onda com termos de ordem inferior a dois são também discutidas, utilizando o exemplo da equação do telégrafo [5].

3.1 A equação de onda em \mathbb{R}

Um exemplo simples de um sistema físico que é descrito pela equação de onda unidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

é a corda vibrante. Neste caso, a função $u(x, t)$ representa o deslocamento na direção transversal da corda na posição x e no instante t relativamente à sua posição de equilíbrio. Vamos mostrar utilizando:

- a derivada da função composta;
- o método das características;

- mudança de variáveis;
- o método de separação de variáveis;
- a transformada de Fourier;

que as soluções da equação de onda podem ser escritas como combinações lineares de funções que descrevem impulsos e ondas que se propagam com velocidade c no sentido positivo e negativo do eixo das abcissas, $f(x - ct)$ e $g(x + ct)$ respetivamente [2, 3, 7]. Isto é, a solução geral da equação de onda é dada por

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct),$$

com $x \in \mathbb{R}$ e onde f e g são funções.

Esta é chamada a solução de D'Alembert para a equação de onda. Podemos concluir que $f(x - ct)$ representa um conjunto de ondas que se movem para a direita com velocidade c uma vez que todos os pontos (x, t) que tomam o mesmo valor fixo, $z = x - ct$, tem o mesmo valor de $f(x - ct)$, designado por $f(z)$. Se mudarmos a nossa posição tal que, no instante t seja $x = z + ct$ (isto é, movimento no sentido positivo do eixo das abcissas para a direita à velocidade c) teremos sempre a mesma amplitude, ver Fig. 3.1 onde se podem ver os gráficos de $f(x)$, $f(x - c) = f(x - ct)|_{t=1}$ e $f(x - 2c) = f(x - ct)|_{t=2}$ para um perfil aproximadamente gaussiano $f(x)$.

De forma análoga, $g(x + ct)$ representa o conjunto de ondas que se movem para a esquerda à velocidade c .

3.1.1 Método 1: derivada da função composta

Utilizando a regra da derivada da função composta, podemos escrever

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{dg}{dm} \frac{\partial m}{\partial x} = \frac{dg}{dm} \times 1,$$

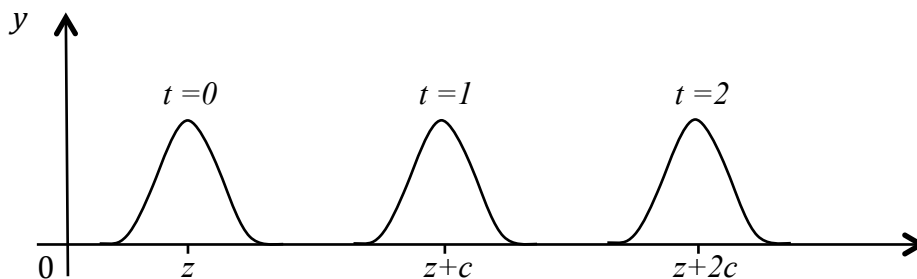


Figura 3.1: Gráficos de um perfil aproximadamente gaussiano em vários instantes de acordo com a evolução dada pela equação de onda.

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{dg}{dm} \frac{\partial m}{\partial t} = \frac{dg}{dm} \times c,$$

onde $m = x + ct$. Então,

$$\frac{\partial g}{\partial t} = c \frac{\partial g}{\partial x},$$

o que implica que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}.$$

Logo $g(x + ct)$ é solução da equação de onda. De modo análogo se prova que $f(x - ct)$ é solução da equação.

Pelo **Princípio da Sobreposição** (ver apêndice B) se $f(x - ct)$ e $g(x + ct)$ são soluções de uma equação diferencial parcial linear e homogênea então a sua combinação linear também é solução dessa equação. Logo podemos concluir que $f(x - ct) + g(x + ct)$ também é solução da nossa equação.

3.1.2 Método 2: método das características para EDPs de 1ª ordem

Nesta subsecção, iremos obter as soluções da equação de onda recorrendo ao método das características para EDPs de 1ª ordem que é descrito no apêndice C [12, 13].

A equação de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

pode ser escrita como

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0. \quad (3.1)$$

Introduzindo a função $v(x, t)$ tal que

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial u}{\partial x}, \quad (3.2)$$

então

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)v = 0.$$

Consequentemente, a solução geral para v é dada por

$$v = h(x - ct). \quad (3.3)$$

Vamos agora mostrar, utilizando o método das características para EDP de 1ª ordem (ver apêndice C) como resolver a equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial u}{\partial x} = h(x - ct),$$

que resulta da Eq. 3.2 e da Eq. 3.3.

Vamos definir as equações da curva característica da seguinte forma

$$\frac{dt}{ds} = 1, \quad (3.4)$$

$$\frac{dx}{ds} = -c, \quad (3.5)$$

$$\frac{dz}{ds} = h(x - ct). \quad (3.6)$$

Uma solução das duas primeiras equações deste sistema é $t = s$ e $x = -cs$, e substituindo esta solução na terceira equação temos $dz/ds = h(-2cs)$, o que implica que

$$z(s) = -\frac{1}{2c} \int_0^{-2cs} h(\tau) d\tau.$$

Fazendo $u(x(s), t(s)) = z(s)$, obtemos a solução

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^0 h(\tau) d\tau \quad (3.7)$$

$$= f(x - ct). \quad (3.8)$$

Uma vez que toda a função da forma $u(x, t) = g(x + ct)$ satisfaz a equação homogênea

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

também é óbvio que satisfaz a Eq. 3.1. Logo, toda a função

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

é solução da equação de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Falta-nos no entanto mostrar que qualquer solução da equação de onda tem a forma $u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$. Sabemos que

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x} = h(x - ct),$$

para alguma função h . Considerando uma função arbitrária F e introduzindo a função w definida da seguinte forma

$$w(x, t) = u(x, t) + F(x + ct) - \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^0 h(s) ds,$$

então

$$\frac{\partial w}{\partial t} - c \frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

o que implica que $w(x, t) = k(x + ct)$ para alguma função k . Consequentemente,

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct),$$

em que $g(x + ct) = k(x + ct) - F(x + ct)$ e $f(x - ct) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^0 h(s)ds$, com k, F, h funções arbitrárias. Logo a solução da equação de onda é

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct).$$

3.1.3 Método 3: mudança de variáveis

Outra forma de chegar a esta solução é fazendo uma mudança de variáveis. Vamos reescrever a equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

como

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0.$$

Pretendemos encontrar ξ e η , variáveis tais que

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x}. \quad (3.10)$$

Estas novas variáveis ξ e η verificam

$$\frac{\partial t}{\partial \xi} = 1, \quad \frac{\partial t}{\partial \eta} = 1,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = c, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = -c,$$

e integrando estas relações obtemos

$$\begin{aligned} t &= \xi + \eta, \\ x &= c\xi - c\eta, \end{aligned}$$

e conseqüentemente

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2c}(x + ct), \\ \eta &= -\frac{1}{2c}(x - ct). \end{aligned}$$

Para simplificar, mudamos a nossa escala, introduzindo as coordenadas características

$$\begin{aligned} \check{\xi} &= 2c\xi = x + ct, \\ \check{\eta} &= -2c\eta = x - ct. \end{aligned}$$

Com estas novas coordenadas, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \check{\xi}} &= \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{2c} \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial}{\partial \check{\eta}} &= -\frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial \eta} = -\frac{1}{2c} \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right), \end{aligned} \tag{3.11}$$

logo

$$-4c^2 \frac{\partial}{\partial \check{\xi}} \frac{\partial}{\partial \check{\eta}} u = \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0,$$

e a nossa equação será

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \check{\xi} \partial \check{\eta}} = 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}u &= f(\check{\eta}) + g(\check{\xi}) \\ &= f(x - ct) + g(x + ct),\end{aligned}$$

com f e g funções arbitrárias. A solução geral da equação de onda é a soma de duas funções arbitrárias f e g .

3.1.4 Método 4: separação das variáveis

O método da separação das variáveis também permite determinar soluções particulares de equações diferenciais parciais lineares. Neste método convertemos uma equação diferencial parcial num sistema de equação diferenciais ordinárias [2, 9, 12]. O método é usualmente utilizado na solução de equações parciais lineares homogêneas.

Separação das variáveis

Começamos por procurar soluções do tipo

$$u(x, t) = X(x)T(t),$$

em que a função $X(x)$ depende de x e a função $T(t)$ depende de t .

Começando por derivar em ordem a x e t a equação anterior, obtemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X \frac{d^2 T}{dt^2}$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2 X}{dx^2} T.$$

Substituindo na equação de onda, temos

$$X \frac{d^2 T}{dt^2} = c^2 \frac{d^2 X}{dx^2} T.$$

Dividindo por $c^2 X T$, obtemos

$$\frac{1}{c^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2} = \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2}.$$

Desta forma temos uma equação em que o primeiro membro da equação depende de t e o segundo membro depende de x . Como as variáveis x e t são independentes a única solução para esta equação é quando ambos os membros da equação são constantes e iguais. Logo

$$\frac{1}{c^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2} = \mu$$

e

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \mu,$$

em que μ é uma constante arbitrária designada constante de separação. Escrevemos então as nossas equações como equações diferenciais ordinárias,

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - \mu X = 0, \quad (3.12)$$

$$\frac{d^2 T}{dt^2} - \mu c^2 T = 0. \quad (3.13)$$

Resolução das equações separadas

Consideremos:

- $\mu > 0$:

Seja $\mu = k^2$ com $k > 0$. A equação em X é

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - k^2 X = 0,$$

com solução geral

$$X(x) = c_1 \cosh(kx) + c_2 \sinh(kx).$$

Estas soluções divergem para $x \rightarrow \pm\infty$ se $c_1 \neq 0$ ou $c_2 \neq 0$. Logo não correspondem a soluções físicas para a corda.

- $\mu = 0$:

A equação diferencial reduz-se a $\frac{d^2 X}{dx^2} = 0$ com solução $X(x) = c_1 x + c_2$.

Novamente as soluções obtidas não correspondem a soluções físicas para a corda.

- $\mu < 0$:

Seja $\mu = -k^2$, a equação diferencial em X é

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + k^2 X = 0,$$

com solução geral

$$X(x) = c_1 \cos(kx) + c_2 \sin(kx),$$

ou

$$X(x) = d_1 e^{ikx} + d_2 e^{-ikx}.$$

Substituindo $\mu = -k^2$ na equação

$$\frac{d^2 T}{dt^2} - \mu c^2 T = 0,$$

obtemos

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + k^2 c^2 T = 0.$$

A solução geral desta equação é

$$T(t) = b_1 \cos(\omega t) + b_2 \sin(\omega t),$$

ou

$$T(t) = \alpha_1 e^{i\omega t} + \alpha_2 e^{-i\omega t},$$

com $w = kc$. Combinando as soluções para X e T , obtemos para cada valor de k

$$\begin{aligned} X(x)T(t) &= \alpha_1(k)e^{ik(x-ct)} + \alpha_2(k)e^{-ik(x+ct)} + \alpha_3(k)e^{ik(x+ct)} + \alpha_4(k)e^{-ik(x-ct)} \\ &\Leftrightarrow X(x)T(t) = f_k(x-ct) + g_k(x+ct). \end{aligned}$$

Sobrepondo todas as soluções correspondentes a diferentes valores de k , ficamos com

$$X(x)T(t) = f(x-ct) + g(x+ct).$$

3.1.5 Método 5: transformada de Fourier

Nesta secção vamos determinar a solução da equação de onda unidimensional utilizando a transformada de Fourier na variável espacial x [2, 5, 12, 17].

Vamos resolver a equação de onda multiplicando ambos os membros da equação por e^{-ikx} e integrando em ordem a x . Isto é, vamos aplicar a transformada de Fourier na variável x . Seja a transformada de Fourier em relação a x , para cada valor fixo t , de $u(x, t)$ dada por

$$U(k, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-ikx} dx. \quad (3.14)$$

Na equação de onda temos derivadas de segunda ordem em ordem a x e t . A transformada de Fourier permite eliminar a derivada em ordem à variável presente na transformada de Fourier.

Consideremos o caso simples da transformada de Fourier da derivada $df(x)/dx$ de uma função f ,

$$F_1(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df(x)}{dx} e^{-ikx} dx. \quad (3.15)$$

Este integral pode ser determinado aplicando o método de integração por partes. Introduzindo as funções $w = e^{-ikx}$ tem-se $\frac{dw}{dx} = -ike^{-ikx}$. Assumindo que $f(x) \rightarrow 0$ quando

$x \rightarrow \pm\infty$, então

$$\begin{aligned} F_1(k) &= f(x) e^{-ikx} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(-ik)e^{-ikx} dx \\ &= ikF(k), \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde $F(k)$ é a transformada de Fourier da função $f(x)$. A partir deste resultado, concluímos que a transformada de Fourier de $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ na variável x é $(ik) \cdot (ik)U(k, t) = -k^2 U(k, t)$.

Para a primeira derivada em ordem ao tempo, temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t} e^{-ikx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x, t+h) - u(x, t)}{h} e^{-ikx} dx \quad (3.17)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t+h) e^{-ikx} dx - \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-ikx} dx \right] \quad (3.18)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [U(k, t+h) - U(k, t)] \quad (3.19)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} U(k, t). \quad (3.20)$$

A partir deste resultado, é simples obter a transformada de Fourier da segunda derivada de u em ordem ao tempo,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} e^{-ikx} dx &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} U(k, t). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Aplicando a transformada de Fourier a ambos os membros da equação de onda, temos

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} U(k, t) = -c^2 k^2 U(k, t), \quad (3.22)$$

isto é, uma equação diferencial ordinária de segunda ordem para $U(k, t)$. Esta equação é facilmente resolvida fazendo $U(k, t) = a(k)e^{rt}$. Uma vez que

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + c^2 k^2 U = (r^2 + c^2 k^2) U = 0,$$

se e só se $r = \pm ick$, a solução da equação anterior, para cada $k \neq 0$ é

$$U(k, t) = d_{1k}e^{-ickt} + d_{2k}e^{ickt},$$

onde d_{1k} e d_{2k} são constantes (para um dado valor de k).

Para $k = 0$, temos $r = \pm ick = 0$, a equação diferencial reduz-se a $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0$ e a solução geral é $U(t) = d_{10} + d_{20}t$. Temos de rejeitar o termo $d_{20}t$, isto é, fazemos $d_{20} = 0$ porque pequenas oscilações transversais da corda excluem a possibilidade de aumentos de amplitude para infinito quando t tende para infinito.

Chamando às constantes arbitrárias d_{1k} , d_{2k} , $F(k)$ e $G(k)$, respetivamente, a solução geral da Eq. 3.22 é

$$U(k, t) = F(k)e^{-ickt} + G(k)e^{ickt}.$$

Para voltar a ter $u(x, t)$ aplicamos a transformada de Fourier inversa

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U(k, t) e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [F(k)e^{-ickt} + G(k)e^{ickt}] e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{ik(x-ct)} dk + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(k) e^{ik(x+ct)} dk \\ &= f(x-ct) + g(x+ct). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Isto é, chegamos à solução de D'Alembert.

3.2 Termos de ordem inferior a 2 na equação de onda

Existem muitas variações para a equação de onda. Considerando o caso particular da corda vibrante, em que $u(x, t)$ representa o deslocamento relativamente à posição de equilíbrio da corda na posição x e instante t :

- se existir resistência de ar, temos um termo extra proporcional à velocidade trans-

versal $\frac{\partial u}{\partial t}$, então a equação de onda tem a forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

em que $r > 0$.

- Se existir uma força transversal, temos um termo extra proporcional ao deslocamento u (como uma mola) e a equação de onda é dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ku = 0,$$

onde $k > 0$.

- Se aplicarmos uma força externa, esta aparece como um termo extra $f(x, t)$, logo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t)$$

e obtemos uma equação diferencial não homogénea.

Todos estes termos podem estar presentes simultaneamente na equação de onda e nesse caso temos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r \frac{\partial u}{\partial t} + ku = f(x, t).$$

Na subsecção seguinte, vamos determinar a solução de um caso particular da equação de onda com termos de ordem inferior, a equação do telégrafo.

3.2.1 Equação do telégrafo

A equação do telégrafo surgiu em 1880 por Oliver Heaviside e baseia-se num par de equações diferenciais lineares que descreve a tensão e a corrente elétrica contínua numa linha de transmissão como funções da distância e do tempo [5].

Consideremos a equação do telégrafo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (\alpha + \beta) \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha\beta u = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3.24)$$

Se considerarmos $\alpha = \beta = 0$, obtemos a equação de onda usual. Vamos então considerar o caso em que $\alpha, \beta > 0$.

Aplicando a transformada de Fourier em relação a x ,

$$U(k, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-ikx} dx, \quad (3.25)$$

obtemos

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(k, t) + (\alpha + \beta) \frac{\partial U}{\partial t}(k, t) + \alpha\beta U(k, t) = -k^2 c^2 U(k, t). \quad (3.26)$$

Novamente, para cada k temos uma equação ordinária de segunda ordem para $U(k, t)$. Cada k pode ser estudado independentemente. Podemos então escrever a equação diferencial anterior para cada k fixo como

$$\frac{d^2 U}{dt^2} + (\alpha + \beta) \frac{dU}{dt} + (\alpha\beta + c^2 k^2) U(t) = 0. \quad (3.27)$$

Então $U(t) = e^{rt}$ é solução se e só se

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2 U}{dt^2} + (\alpha + \beta) \frac{dU}{dt} + (\alpha\beta + c^2 k^2) U(t) \\ &= (r^2 + (\alpha + \beta)r + (\alpha\beta + c^2 k^2)) e^{rt}. \end{aligned}$$

Para que tal aconteça

$$\begin{aligned} r &= \frac{-(\alpha + \beta) \pm \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4(\alpha\beta + c^2 k^2)}}{2} \\ &= \frac{-(\alpha + \beta) \pm \sqrt{(\alpha - \beta)^2 - 4c^2 k^2}}{2}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Se $4c^2k^2 \leq (\alpha - \beta)^2$, os valores de r são reais e negativos, pois

$$0 < (\alpha - \beta)^2 - 4c^2k^2 < (\alpha - \beta)^2$$

$$\Rightarrow 0 < \sqrt{(\alpha - \beta)^2 - 4c^2k^2} < |\alpha - \beta|$$

$$\Rightarrow \frac{-(\alpha + \beta)}{2} \leq \frac{-(\alpha + \beta) \pm \sqrt{(\alpha - \beta)^2 - 4c^2k^2}}{2} \leq \frac{-(\alpha + \beta) + |\alpha - \beta|}{2}.$$

Uma vez que $|\alpha - \beta|$ é $\alpha - \beta$ se $\alpha \geq \beta$ ou $\beta - \alpha$ se $\alpha \leq \beta$,

$$\frac{-(\alpha + \beta) \pm \sqrt{(\alpha - \beta)^2 - 4c^2k^2}}{2}$$

é um número real compreendido entre $-\alpha$ e $-\beta$ e ambos os valores de r são estritamente negativos. Então ambas as soluções para $U(t)$ decaem para zero quando $t \rightarrow \infty$. Vamos então considerar $U(k, t)$ para $4c^2k^2 > (\alpha - \beta)^2$. Então,

$$\begin{aligned} r &= \frac{-(\alpha + \beta) \pm \sqrt{(\alpha - \beta)^2 - 4c^2k^2}}{2} \\ &= -\frac{(\alpha + \beta)}{2} \pm \frac{1}{2}i\sqrt{4c^2k^2 - (\alpha - \beta)^2} \\ &= -\gamma \pm iw(k), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\alpha + \beta}{2}, \\ w(k) &= \sqrt{c^2k^2 - \frac{(\alpha - \beta)^2}{4}}. \end{aligned}$$

Logo a solução geral para a equação é

$$\begin{aligned} U(k, t) &= U(t) = F(k)e^{[-\gamma - iw(k)]t} + G(k)e^{[-\gamma + iw(k)]t} \\ &= e^{-\gamma t} [F(k)e^{-iw(k)t} + G(k)e^{iw(k)t}], \end{aligned}$$

em que $F(k)$ e $G(k)$ são constantes arbitrárias (k é constante na equação diferencial ordinária). Logo

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} e^{-\gamma t} \int_{-\infty}^{+\infty} [F(k)e^{-iw(k)t} + G(k)e^{iw(k)t}] e^{ikx} dk.$$

Se ajustarmos o fio do telégrafo tal que $\alpha = \beta$, então $w(k) = ck$ e

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} e^{-\gamma t} \int_{-\infty}^{+\infty} [F(k)e^{-ikct} + G(k)e^{ikct}] e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\gamma t} \int_{-\infty}^{+\infty} [F(k)e^{ik(x-ct)} + G(k)e^{ik(x+ct)}] dk \\ &= e^{-\gamma t} [f(x-ct) + g(x+ct)]. \end{aligned}$$

Tal como no caso da equação de onda, temos um conjunto de ondas que se move para a direita e para a esquerda com velocidade c . Estas ondas mantêm a sua forma ao longo do tempo, mas o fator $e^{-\gamma t}$ faz com que o tamanho do conjunto diminua.

Capítulo 4

Condições de fronteira/iniciais para a equação de onda unidimensional

Como vimos no capítulo anterior, equações diferenciais parciais tais como equações diferenciais ordinárias admitem usualmente um conjunto infinito de soluções. Impondo condições adicionais, um subconjunto destas soluções é selecionado. Estas condições são denominadas de condições de fronteira ou condições iniciais [2, 6]. Fenómenos físicos como por exemplo a vibração de uma corda com extremidades fixas podem ser descritos por uma equação diferencial parcial e um conjunto de condições de fronteira.

Quando impomos condições sobre a solução $u(x, t)$ de uma equação diferencial parcial ou sobre as suas derivadas na fronteira dos valores permitidos para x , temos o chamado problema de valores de fronteira. Se essas condições apenas são impostas nos valores de $u(x, t)$ na fronteira, e não nos valores das derivadas de $u(x, t)$, as condições de fronteira dizem-se de Dirichlet. Como nas equações diferenciais parciais temos mais de uma variável independente, podemos fixar uma das variáveis e impor o valor da solução e das derivadas parciais em relação à variável fixada como função das outras variáveis e este é denominado por problema de condições iniciais.

Neste capítulo vamos obter a fórmula de D'Alembert para a equação de onda unidimensional (que descreve por exemplo, as vibrações de uma corda infinita) com condições iniciais

de Cauchy. De seguida, iremos resolver a equação de onda pelo método da separação de variáveis num intervalo finito. Iremos considerar o caso unidimensional da equação de onda num intervalo, obedecendo às condições de fronteira de Dirichlet. Pretende-se encontrar uma solução para a equação de onda da forma $u(x, t) = X(x)T(t)$. Em particular, iremos estudar a oscilação da corda quando as extremidades estão fixas, quando uma extremidade está fixa e a outra livre, quando ambas as extremidades estão livres e quando as extremidades estão unidas, isto é, a corda tem a forma de um anel. Finalmente, mostraremos que a fórmula de D'Alembert pode ser generalizada para problemas com condições de fronteira, utilizando o método das reflexões.

4.1 Condições iniciais e a fórmula de D'Alembert

Nesta secção, pretendemos construir a solução de D'Alembert para a equação de onda unidimensional com condições iniciais [9]. A equação de onda é dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (4.1)$$

Consideremos as condições iniciais

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) \quad x \in \mathbb{R},$$

em que φ, ψ são funções dadas.

Iremos provar que a equação de onda sujeita às condições iniciais de Cauchy tem uma única solução u dada pela fórmula de D'Alembert

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds. \quad (4.2)$$

No capítulo anterior, mostramos que a solução da equação de onda unidimensional é da

forma

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct),$$

mas agora esta solução tem de satisfazer as condições iniciais no instante $t = 0$,

$$f(x) + g(x) = \varphi(x), \quad (4.3)$$

$$c \frac{df}{dx} - c \frac{dg}{dx} = \psi(x). \quad (4.4)$$

Derivando a Eq. 4.3 em ordem a x e resolvendo o sistema linear em ordem a $\frac{df}{dx}$ e $\frac{dg}{dx}$, obtemos

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dx} + \frac{1}{2c} \psi(x), \quad (4.5)$$

$$\frac{dg}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dx} - \frac{1}{2c} \psi(x). \quad (4.6)$$

Integrando estas equações de 0 até x temos

$$f(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x \psi(s) ds + (f(0) - \frac{1}{2} \varphi(0)), \quad (4.7)$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x \psi(s) ds + (g(0) - \frac{1}{2} \varphi(0)). \quad (4.8)$$

Da Eq. 4.3, $f(0) + g(0) = \varphi(0)$ logo

$$\begin{aligned} u(x, t) &= f(x + ct) + g(x - ct) \\ &= \frac{1}{2} (\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)) + \frac{1}{2c} \left(\int_0^{x+ct} \psi(s) ds - \int_0^{x-ct} \psi(s) ds \right) \\ &= \frac{1}{2} (\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds. \end{aligned}$$

Obtivemos a fórmula de D'Alembert para a equação de onda unidimensional com condições iniciais. Se $\varphi = \psi = 0$, temos que $u = 0$.

4.2 Condições de fronteira

A solução de problemas físicos requer não só encontrar a solução geral da equação diferencial parcial, mas selecionar dentro do conjunto destas soluções, as que satisfazem um conjunto de condições de fronteira [2, 6]. Estas condições de fronteira são classificadas em três categorias:

- **Condições de fronteira de Cauchy**

As condições de fronteira são dadas pelo valor da função e a derivada direcional de u na direção normal à fronteira. No caso da equação de onda unidimensional definida no intervalo $]0, L[$, esta derivada direcional é simplesmente a derivada parcial $\partial u / \partial x$ e as condições de fronteira são definidas nos pontos $x = 0$ e $x = L$.

- **Condições de fronteira de Dirichlet**

O valor da função é especificado na fronteira.

- **Condições de fronteira de Neumann**

A derivada direcional de u na direção normal à fronteira é especificada na fronteira.

Um exemplo de equação diferencial parcial sujeita a condições de fronteira de Cauchy é

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ u(x, 0) = \text{tg}(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = x. \end{array} \right.$$

4.2.1 Corda com extremidades fixas

Iremos considerar o caso unidimensional da equação de onda num intervalo, obedecendo às condições de fronteira de Dirichlet. Vamos então separar as variáveis da equação,

$u(x, t) = X(x)T(t)$. Iremos assumir que a corda, de comprimento L , na posição de repouso ocupa o intervalo do eixo das abscissas entre 0 e L , isto é, têm as extremidades em $x = 0$ e $x = L$. Seja $u(x, t)$ o deslocamento da corda na posição x e no instante t , que satisfaz

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0. \quad (4.9)$$

Consideremos as seguintes **condições de fronteira**, em que as extremidades da corda são fixas para todo o instante t ,

$$u(0, t) = 0 \quad \text{e} \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0 \quad (4.10)$$

e as seguintes **condições iniciais** que dão a forma inicial da corda e a respetiva velocidade inicial,

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < L. \quad (4.11)$$

Assim obtemos para $t > 0$,

$$X(0)T(t) = 0,$$

$$X(L)T(t) = 0.$$

Se $X(0) \neq 0$ e $X(L) \neq 0$, temos que $T(t) = 0$ para todo o t , donde $u(x, t) = 0$. Para evitar esta solução trivial, iremos considerar $X(0) = 0$ e $X(L) = 0$. De acordo com a Eq. 3.12 temos então o seguinte problema de valores de fronteira para X ,

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - \mu X = 0, \quad X(0) = 0 \quad \text{e} \quad X(L) = 0.$$

Iremos constatar que nem todos os valores de μ nos levam a uma solução não trivial X . Consideremos:

- $\mu > 0$:

Seja $\mu = k^2$, com $k > 0$, a equação em X é

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - k^2 X = 0,$$

com solução geral

$$X(x) = c_1 \cosh kx + c_2 \sinh kx.$$

A única forma de satisfazer as condições de fronteira em X é fazer $c_1 = c_2 = 0$. A condição $X(0) = 0$ implica $0 = c_1 \cosh(0) + c_2 \sinh(0) = c_1$, logo $X(x) = c_2 \sinh(kx)$. A condição $X(L) = 0$ implica que $c_2 \sinh(kL) = 0$. Como $kL \neq 0$, $\sinh(kL) \neq 0$ e $c_2 = 0$, donde $X = 0$. Ou seja, para $\mu > 0$ obtemos soluções triviais.

- $\mu = 0$:

A equação diferencial reduz-se a $\frac{d^2 X}{dx^2} = 0$ com solução $X(x) = c_1 x + c_2$. E a única forma de satisfazer as condições de fronteira em X é fazer $c_1 = c_2 = 0$, o que nos leva novamente à solução trivial $u = 0$.

- $\mu < 0$:

Seja $\mu = -k^2$, então

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + k^2 X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(L) = 0.$$

A solução geral desta equação diferencial é

$$X(x) = c_1 \cos(kx) + c_2 \sin(kx).$$

A condição $X(0) = 0$ implica que $c_1 = 0$, e por conseguinte, $X = c_2 \sin(kx)$. A condição $X(L) = 0$ implica que $c_2 \sin(kL) = 0$. Para evitarmos a solução trivial $X = 0$, fazemos $c_2 \neq 0$, logo $\sin(kL) = 0$. Uma vez que a função seno anula-se em

múltiplos de π , concluímos que

$$k = k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

logo

$$X(x) = X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

onde fizemos $c_2 = 1$.

De salientar que para valores negativos de n obtemos as mesmas soluções com a exceção do sinal, logo podemos desprezar os valores negativos de n .

Substituindo $\mu = -k^2 = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ na equação obtida pelo método da separação de variáveis

$$\frac{d^2T}{dt^2} - \mu c^2 T = 0,$$

obtemos

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \left(c\frac{n\pi}{L}\right)^2 T = 0.$$

A solução geral desta equação diferencial é

$$T(t) = T_n(t) = a_n \cos(\lambda_n t) + b_n \sin(\lambda_n t),$$

com

$$\lambda_n = c\frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Combinando as soluções para X e T , obtemos uma infinidade de soluções, todas satisfazendo as condições de fronteira,

$$u_n(x, t) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) (a_n \cos(\lambda_n t) + b_n \sin(\lambda_n t)), \quad n = 1, 2, \dots$$

em que a_n e b_n são constantes.

Estas soluções são designadas modos normais da equação de onda. Como todos os modos normais satisfazem a equação linear homogênea Eq. 4.9 e as condições de fronteira Eq. 4.10, pelo princípio da sobreposição, qualquer combinação linear será solução da equação de onda [14]. Impondo condições iniciais apenas uma destas combinações lineares será solução.

4.2.2 Corda com extremidades livres

Neste caso, a corda de comprimento L , tem as suas extremidades livres, ou seja, podem movimentar-se no sentido vertical, mas não na horizontal. Pretendemos novamente encontrar uma solução para a equação de onda da forma $u(x, t) = X(x)T(t)$, onde a função X depende de x e a função T depende apenas de t .

As **condições de fronteira**, em que a corda tem as extremidades livres para todo o instante t , são dadas por

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0, \quad t > 0. \quad (4.12)$$

Vamos considerar as seguintes **condições iniciais**

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 < x < L. \quad (4.13)$$

Assim, para $t > 0$, obtemos duas equações diferenciais ordinárias

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - \mu X = 0, \quad (4.14)$$

$$\frac{d^2 T}{dt^2} - c^2 \mu T = 0. \quad (4.15)$$

Após a análise das três possibilidades para o valor de μ , conclui-se que só existe solução não trivial para $\mu < 0$. Assim, fazendo $\mu = -k^2$, a solução é

$$X(x) = c_1 \cos(kx) + c_2 \sin(kx). \quad (4.16)$$

Das condições de fronteira Eq. 4.12, conclui-se que $c_2 = 0$ e $c_1 \sin(kL) = 0$. Para obter as soluções não triviais de Eq. 4.14, a constante k é da forma

$$k = \frac{n\pi}{L} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

e as soluções são da forma

$$X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.17)$$

Substituindo $k = \frac{n\pi}{L}$ na Eq. 4.15 e tendo em conta a condição inicial $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$,

$$T_n(t) = \cos\left(\frac{cn\pi t}{L}\right), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.18)$$

De Eq. 4.17 e Eq. 4.18 e pelo princípio da sobreposição podemos concluir que

$$u(x, t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x) T_n(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{cn\pi t}{L}\right), \quad (4.19)$$

onde as constantes c_n são determinadas pela condição inicial $u(x, 0) = f(x)$.

4.2.3 Anéis e condições de fronteira periódicas

Assumindo uma geometria em forma de anel (ver Fig. 4.1), para a corda, as condições de fronteira para $u(x, t)$ são designadas periódicas [8] e escrevemos

$$u(0, t) = u(L, t), \quad t > 0,$$

onde L é o comprimento da corda. A variável x está relacionada com o ângulo polar θ e consideremos que o comprimento da corda é L , em que $x = \frac{\theta l}{\pi}$ e $L = 2l$. Em particular, $x = -l$ e $x = l$ representam o mesmo ponto da corda.

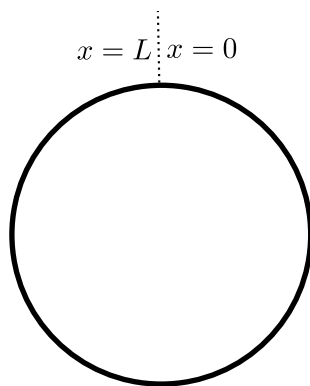


Figura 4.1: Geometria da corda em forma de anel que traduz a existência de condições de fronteira periódicas.

Consideremos novamente as seguintes condições iniciais:

$$u(x, 0) = f(x), \quad -l < x \leq l.$$

No caso de um anel não temos extremidades, no entanto, como $x = -l$ representa o mesmo ponto da corda que $x = l$, temos as seguintes condições de fronteira

$$u(-l, t) = u(l, t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(-l, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l, t), \quad t > 0.$$

Estas equações denominam-se por condições de fronteira periódicas. Pretendemos resolver

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad -l < x < l, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad -l < x < l,$$

$$u(-l, t) = u(l, t), \quad t > 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(-l, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l, t), \quad t > 0.$$

Tal como no caso das extremidades fixas, os modos de vibração da corda correspondem a

soluções $u = XT$, com

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - \mu X = 0,$$

com

$$X(-l) = X(l).$$

- $\mu = 0$:

Neste caso temos

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = 0, \quad -l < x < l,$$

$$X(-l) = X(l),$$

$$\frac{dX}{dx}(-l) = \frac{dX}{dx}(l)$$

que apenas admite soluções que são as funções constantes.

- $\mu = -k^2$:

Seja $\mu = -k^2, k > 0$, temos

$$-\frac{d^2 X}{dx^2} = k^2 X, \quad -l < x < l, \quad (4.20)$$

$$X(-l) = X(l), \quad (4.21)$$

$$\frac{dX}{dx}(-l) = \frac{dX}{dx}(l). \quad (4.22)$$

A solução geral da Eq. 4.20 é

$$X(x) = c_1 \cos(kx) + c_2 \sin(kx).$$

Da condição fronteira, Eq. 4.21 obtemos

$$c_1 \cos(kl) + c_2 \sin(kl) = c_1 \cos(kl) - c_2 \sin(kl),$$

Da condição fronteira, Eq. 4.22 obtemos,

$$-c_1 k \sin(kl) + c_2 k \cos(kl) = c_1 k \sin(kl) + c_2 k \cos(kl).$$

Como $k > 0$ ficamos reduzidos, respetivamente, a

$$c_2 = 0 \quad \text{ou} \quad \sin(kl) = 0$$

e

$$c_1 = 0 \quad \text{ou} \quad \sin(kl) = 0,$$

e as soluções não triviais da Eq. 4.20 são obtidas impondo $kl = n\pi$, $n = 1, 2, \dots$ logo

$$\mu = -\frac{n^2 \pi^2}{l^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

e as funções da forma

$$\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad \text{ou} \quad \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

satisfazem a Eq. 4.20. Como são linearmente independentes, temos duas soluções para cada k . O conjunto completo de soluções para condições de fronteira periódicas é

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 0, \quad f_0(x) = 1; \\ \mu_n &= -\frac{n^2 \pi^2}{l^2}, \quad f_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ \mu_n &= -\frac{n^2 \pi^2}{l^2}, \quad g_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

A dependência no tempo pode ser determinada segundo os passos descritos nas secções anteriores.

4.2.4 Outras condições de fronteira

No caso mais geral, as extremidades movem-se transversalmente, de acordo com leis conhecidas, por exemplo, $u(0, t) = a(t)$, $u(L, t) = b(t)$, para $t > 0$. As abordagens descritas nas secções anteriores podem também ser aplicadas nesta situação.

4.3 Fórmula de D'Alembert e o método da reflexão

Nesta secção, vamos mostrar que a fórmula de D'Alembert pode ser generalizada para uma situação com condições de fronteira, recorrendo ao método da reflexão.

4.3.1 Corda com uma extremidade fixa

Consideremos a equação de onda sujeita às condições de fronteira de Dirichlet, com a extremidade fixa em $x = 0$ e com condições iniciais, isto é,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < \infty, & \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), & \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= \psi(x), & 0 < x < \infty, \\ u(0, t) &= 0, & t &\geq 0.\end{aligned}$$

Vamos começar por converter este problema de uma corda semi-infinita num problema equivalente para uma corda infinita, aplicando o método da reflexão. Consideremos extensões ímpares das funções iniciais $\varphi_0(x)$ e $\psi_0(x)$, isto é

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{se } x > 0, \\ -\varphi(-x), & \text{se } x < 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

$$\psi_0(x) = \begin{cases} \psi(x), & \text{se } x > 0, \\ -\psi(-x), & \text{se } x < 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

O problema estendido a todo o \mathbb{R} é

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ v(x, 0) &= \varphi_0(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) &= \psi_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

tem solução

$$v(x, t) = \frac{1}{2}(\varphi_0(x + ct) + \varphi_0(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi_0(s) ds.$$

e a restrição

$$u(x, t) = v(x, t)|_{x \geq 0}$$

é a única solução do problema.

Se $0 < x < ct$, então

$$\begin{aligned} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi_0(s) ds &= \int_0^{x+ct} \psi(s) ds - \int_{x-ct}^0 \psi(-s) ds \\ &= \int_0^{x+ct} \psi(s) ds + \int_{ct-x}^0 \psi(s) ds \\ &= \int_{ct-x}^{x+ct} \psi(s) ds, \end{aligned} \tag{4.23}$$

logo

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds, & x > ct, \\ \frac{1}{2}(\varphi(x + ct) - \varphi(ct - x)) + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{x+ct} \psi(s) ds, & 0 < x < ct. \end{cases}$$

4.3.2 Corda com duas extremidades fixas

Nesta subsecção vamos mostrar que a fórmula de D'Alembert pode ser generalizada para a equação de onda no intervalo finito $[0, l]$ com condições de fronteira de Dirichlet de extremidade $x = 0$ e $x = l$, isto é

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \\ u(0, t) &= u(l, t) = 0, \quad t \geq 0.\end{aligned}$$

Aplicando o método de reflexão em ambas as extremidades obtemos a solução. Consideremos as condições iniciais $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ do intervalo $(0, l)$ e aplicamo-las em toda a corda usando extensões ímpares $\varphi_{eo}(x)$ e $\psi_{eo}(x)$ em $x = 0$ e $x = l$ respetivamente, onde

$$\varphi_{eo}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & 0 < x < l, \\ -\varphi(-x), & -l < x < 0, \end{cases}$$

com extensões de período $2l$.

Consideremos

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ v(x, 0) &= \varphi_{eo}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) &= \psi_{eo}(x), \quad x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

A solução é

$$v(x, t) = \frac{1}{2}(\varphi_{eo}(x + ct) + \varphi_{eo}(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi_{eo}(s) ds.$$

De modo análogo se resolve a equação de onda com as condições de fronteira de Neumann, considerando as extensões pares das condições iniciais.

Capítulo 5

Métodos numéricos

Em geral, a determinação da solução de equações diferenciais parciais requer a utilização de métodos numéricos [2, 15]. Estes métodos numéricos usualmente recorrem à discretização, isto é, reduzem o problema contínuo, com um número infinito de variáveis, a um problema discreto com um número finito de variáveis, que pode ser resolvido computacionalmente, obtendo-se neste caso uma solução aproximada para a equação diferencial parcial. Entre os principais métodos numéricos utilizados para resolução dessas equações temos: o método das diferenças finitas, o método dos elementos finitos, o método dos elementos de contorno e o método dos volumes finitos. Atualmente, existem vários programas comerciais e de código livre que permitem obter a solução numérica de EDPs recorrendo a estes métodos.

Neste capítulo apresentamos a solução numérica da equação de onda unidimensional em várias situações utilizando o método das diferenças finitas recorrendo para isso à utilização do software Mathematica [1, 11, 12, 16, 18]. O método das diferenças finitas é um de vários métodos numéricos para resolver problemas com condições de fronteira e condições iniciais. Este método resulta da truncatura da série de Taylor, onde a equação diferencial parcial, as condições de fronteira e as condições iniciais são substituídas por equações algébricas que são resolvidas por técnicas numéricas conhecidas.

5.1 Método das diferenças finitas

Consideremos uma função $u(x)$ diferenciável. Pelo teorema de Taylor,

$$u(x+h) = u(x) + h \frac{du}{dx}(x) + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2u}{dx^2}(x) + \frac{h^3}{3!} \frac{d^3u}{dx^3}(x) + \cdots, \quad (5.1)$$

$$u(x-h) = u(x) - h \frac{du}{dx}(x) + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2u}{dx^2}(x) - \frac{h^3}{3!} \frac{d^3u}{dx^3}(x) + \cdots \quad (5.2)$$

Subtraindo a Eq. 5.2 à Eq. 5.1 obtemos

$$u(x+h) - u(x-h) = 2h \frac{du}{dx}(x) + O(h^3), \quad (5.3)$$

em que $O(h^3)$ é o erro de truncatura, isto é, a diferença entre o resultado exato e o resultado aproximado, originado por desprezar os termos de ordem 3 e superiores. Então

$$\frac{du}{dx}(x) \simeq \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}, \quad (5.4)$$

esta equação é a fórmula de diferença central de primeira ordem e geometricamente representa o declive do segmento \overline{AB} na Fig. 5.1. Da mesma forma, podemos definir diferenças a jusante ou, progressivas

$$\frac{du}{dx}(x) \simeq \frac{u(x+h) - u(x)}{h}, \quad (5.5)$$

e diferenças a montante ou regressivas

$$\frac{du}{dx}(x) \simeq \frac{u(x) - u(x-h)}{h}, \quad (5.6)$$

com erro de truncatura de $O(h^2)$. Estas equações representam o declive dos segmentos \overline{BP} e \overline{PA} , respetivamente, na Fig. 5.1. Se adicionarmos a Eq. 5.1 a Eq. 5.2 obtemos

$$u(x+h) + u(x-h) = 2u(x) + h^2 \frac{d^2u}{dx^2}(x) + O(h^4), \quad (5.7)$$

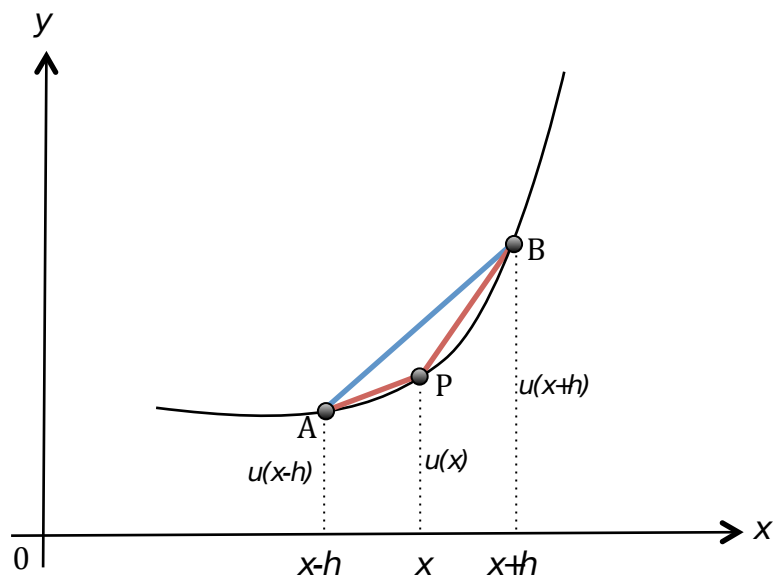


Figura 5.1: Segmentos correspondentes à diferença central (\overline{AB}), diferença progressiva (\overline{BP}) e diferença regressiva \overline{PA} .

que nos leva à fórmula central diferencial de segunda ordem

$$\frac{d^2 u}{dx^2}(x) \simeq \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}, \quad (5.8)$$

com erro de truncatura de $\frac{1}{12}h^2 \frac{d^4 u}{dx^4}$. Podemos definir relações semelhantes utilizando diferenças progressivas ou regressivas e nesse caso o erro de truncatura é $h \frac{d^3 u}{dx^3}$.

No caso da função $u(x, t)$ de duas variáveis x e t , recorremos a uma partição no eixo das abcissas em intervalos de amplitude h , e no eixo das ordenadas, t , em intervalos de comprimento l . O plano (x, t) fica dividido em retângulos de área hl por linhas paralelas a Ot , definidas por $x_i = ih, i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ e por linhas paralelas a Ox definidas por $y_j = jl, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Seja $u_P = u(ih, jl) = U_{i,j}$ o valor da função $u(x, t)$ no nodo da

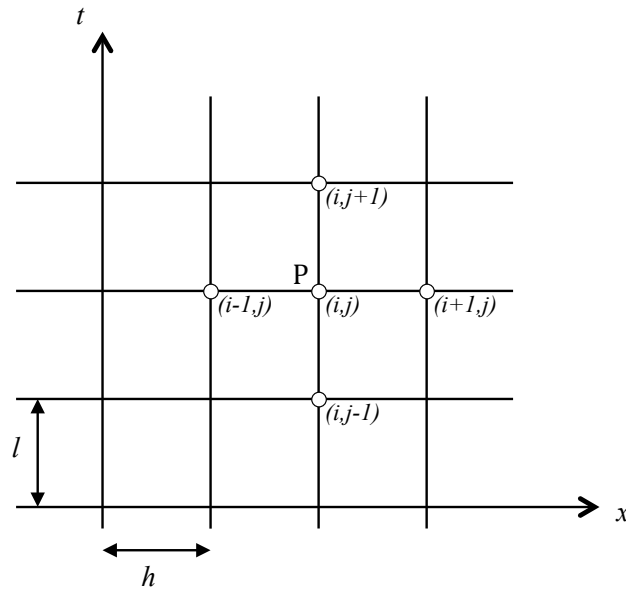


Figura 5.2: Malha bidimensional utilizada no método das diferenças finitas para uma função $u(x, t)$.

malha $P(ih, jl)$. Então podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_P = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_{i,j} &= \frac{u[(i+1)h, jl] - 2u(ih, jl) + u[(i-1)h, jl]}{h^2} \\ &= \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}|_P = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}|_{i,j} = \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{l^2}. \quad (5.10)$$

As derivadas de 1ª ordem são dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}|_{i,j} &= \frac{u[(i+1)h, jl] - u[(i-1)h, jl]}{2h} \\ &= \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2h}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{i,j} &= \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{2l}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

5.2 Aplicação à equação de onda unidimensional

Consideremos a equação de onda linear

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (5.12)$$

Aplicando o método das diferenças, cada derivada de segunda ordem é substituída por uma aproximação de diferença central, isto é, substituindo a Eq. 5.9 e a Eq. 5.10 na Eq. 5.12, obtemos

$$U_{i,j+1} = 2(1 - r)U_{i,j} + r(U_{i+1,j} + U_{i-1,j}) - U_{i,j-1}, \quad (5.13)$$

onde $r = \left(\frac{cl}{h}\right)^2$, e $U_{i,j+1}$ é um valor desconhecido que depende de $U_{i,j}, U_{i+1,j}, U_{i-1,j}, U_{i,j-1}$ nos tempos anteriores (j e $j - 1$).

O método das diferenças finitas pode ser aplicado na presença de condições iniciais,

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad (5.14)$$

Para inicializar o método a partir da Eq. 5.13, precisamos de conhecer os valores de U nos instantes $j = 0$ e $j = 1$. Vamos então definir as condições iniciais nestes instantes,

$$U_{i,0} = f(x_i), \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) &\approx \frac{U_{i,1} - U_{i,0}}{l} = g(x_i), \\ \Rightarrow U_{i,1} &= f(x_i) + lg(x_i). \end{aligned} \quad (5.16)$$

A aproximação da Eq. 5.16 tem um erro da ordem de l mas o resto do método tem erros proporcionais a l^2 . Assim, a Eq. 5.16 introduz um erro considerável no instante inicial. Para construir uma aproximação inicial a u com erro da ordem de l^2 , precisamos de uma

aproximação de ordem superior para a Eq. 5.16. Pelo teorema de Taylor

$$\begin{aligned}\frac{u(x_m, l) - u(x_m, 0)}{l} &= \frac{\partial u}{\partial t}(x_m, 0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_m, 0)l + O(l^2) \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}(x_m, 0) + \frac{c^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_m, 0)l + O(l^2).\end{aligned}$$

Na última igualdade, utilizamos o facto de que $u(x, t)$ é solução da equação de onda. Logo,

$$\begin{aligned}U_{m,1} = u(x_m, l) &\approx u(x_m, 0) + \frac{\partial u}{\partial t}(x_m, 0)l + \frac{c^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_m, 0)l^2 \\ &= f(x_m) + g(x_m)l + \frac{c^2}{2} f''(x_m)l^2 \\ &\approx f_m + g_m l + \frac{c^2(f_{m+1} - 2f_m + f_{m-1})l^2}{2l^2},\end{aligned}$$

onde aplicamos o método das diferenças finitas à segunda derivada de $f(x)$.

As condições de fronteira também podem ser implementadas neste método, por exemplo correspondentes a extremidades fixas em $x = 0$ e $x = L$,

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad (5.17)$$

são implementadas fixando $U_{0,j} = 0$ e $U_{\frac{L}{h},j} = 0$ para todo j .

Nas subsecções seguintes, vamos considerar casos particulares da equação de onda para os quais temos a solução exata e comparar os resultados numéricos obtidos usando o método das diferenças finitas com esses resultados exatos. Obviamente o método das diferenças finitas só é importante nas situações em que não existe uma solução exata, por exemplo, quando introduzimos termos de ordem inferior ou termos não lineares na equação de onda.

5.2.1 Corda infinita inicialmente em repouso

Vamos exemplificar a utilização do método das diferenças finitas no caso da corda infinita inicialmente em repouso ($g(x) = 0$) e com um impulso localizado numa região

centrada em $x = 4\pi$,

$$f(x) = \begin{cases} \cos^3(x - 4\pi), & \text{se } x \in \left(\frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}\right), \\ 0 & \text{se } x \notin \left(\frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}\right). \end{cases}$$

A solução exata da nossa equação de onda é $u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct))$. Utilizando o programa *Mathematica* representamos na Fig. 5.3 o comportamento exato da nossa função $u(x, t)$ em alguns instantes, $t \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, considerando $c = 1$. Verificamos que quando $t = 0$ a amplitude do impulso é 1, e que após o instante $t = 2$, a nossa curva se divide em dois impulsos que se movem em sentido contrário com uma velocidade 1 e de amplitude $\frac{1}{2}$.

Para aplicar o método das diferenças finitas neste caso, consideramos uma região finita $0 \leq x \leq L$ e o intervalo de tempo $0 \leq t \leq T$. A solução numérica é a apresentada na Fig. 5.4 e verificamos que a solução numérica coincide com a exata, excluindo pequenas oscilações.

5.2.2 Corda infinita com velocidade inicial

Consideremos agora o caso da corda infinita com velocidade $c = \sqrt{\pi}$, $\varphi = 0$ (isto é, a corda está esticada no instante $t = 0$) e com um perfil de velocidades no instante $t = 0$ dado por $g(x) = e^{-x^2}$. Seja $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2} ds$ a função erro usada em estatística.

A solução exata obtida a partir da fórmula de D'Alembert é

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x-\sqrt{\pi}t}^{x+\sqrt{\pi}t} e^{-s^2} ds \quad (5.18)$$

$$= \frac{1}{4} (\text{erf}(x + \sqrt{\pi}t) - \text{erf}(x - \sqrt{\pi}t)) \quad (5.19)$$

e está representada em vários instantes na Fig. 5.5 Utilizando o programa *Mathematica* estudamos o comportamento da nossa função $u(x, t)$ em alguns instantes, $t \in \{0, 1, 2, 3\}$. Para $t = 1$ temos uma amplitude $\frac{1}{2}$ que se mantém nos outros instantes. A solução

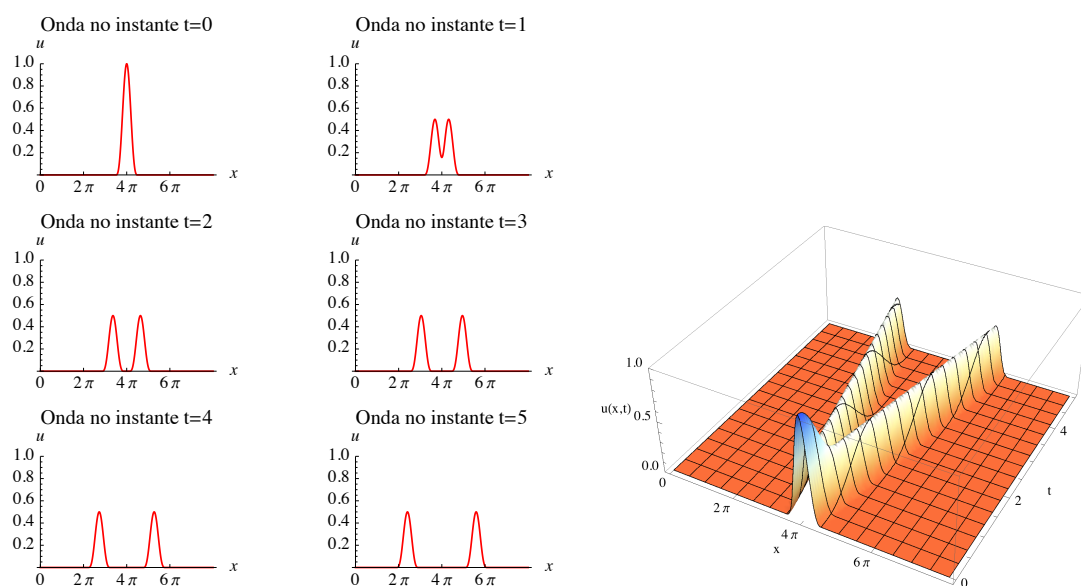


Figura 5.3: Solução exata da equação de onda no caso da corda infinita inicialmente em repouso. Inicialmente, temos um único impulso de amplitude 1, que mais tarde se divide em dois impulsos que se movem em sentido contrário com uma velocidade 1 e de amplitude $\frac{1}{2}$.

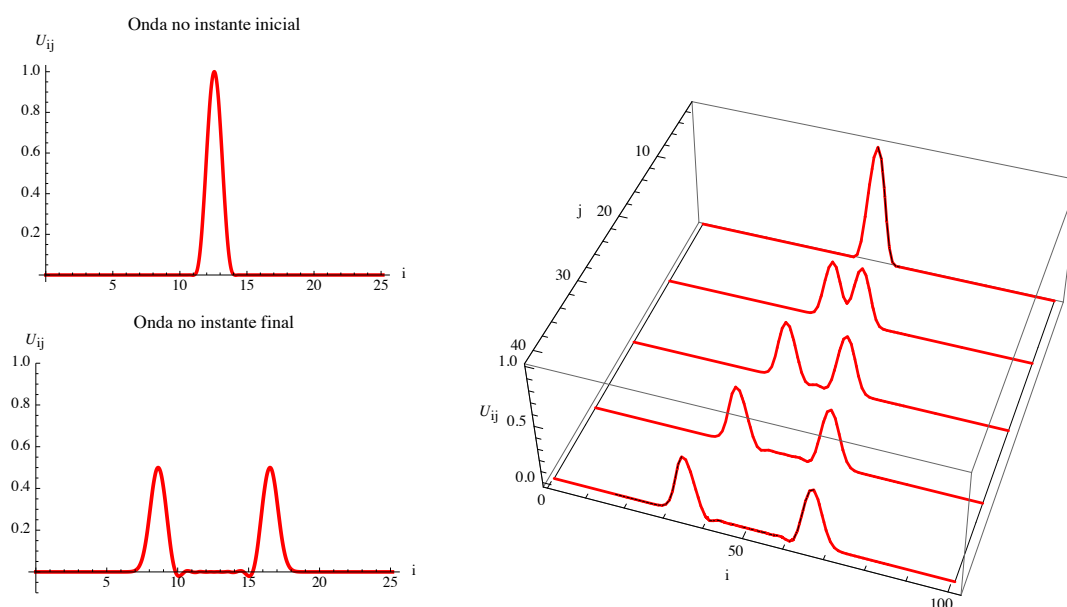


Figura 5.4: Solução para a equação de onda pelo método das diferenças finitas no caso da corda infinita inicialmente em repouso. Os erros numéricos originam pequenas oscilações.

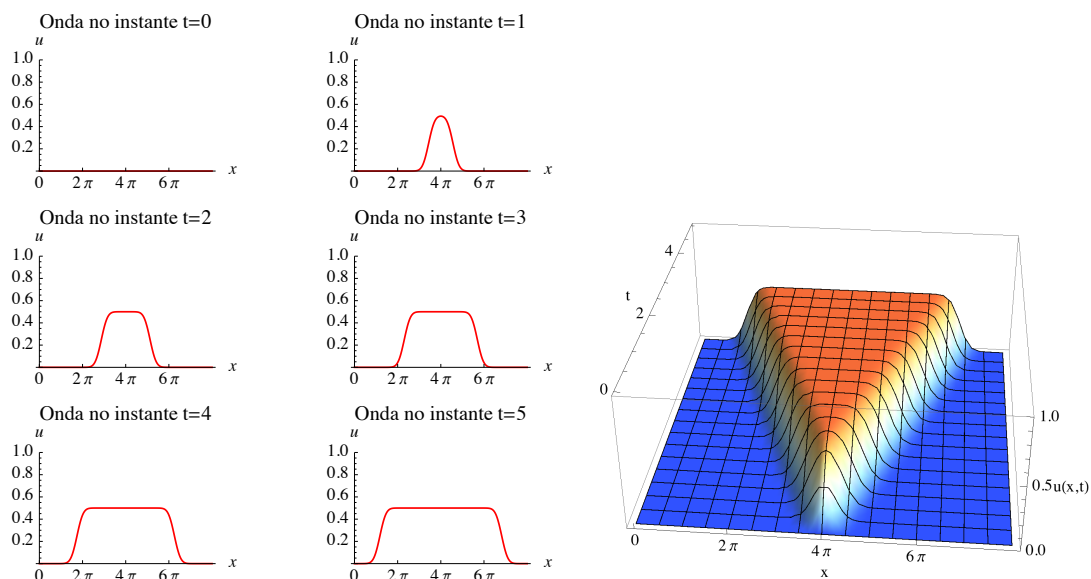


Figura 5.5: Solução exata da equação de onda no caso da corda infinita inicialmente esticada e com velocidade inicial $g(x) = e^{-x^2}$.

numérica é a apresentada na Fig. 5.6 e verificamos que a solução numérica coincide com a exata.

5.2.3 Aplicação à corda com extremidades fixas

Na Fig. 5.7, mostramos as soluções obtidas pelo método das diferenças finitas no caso da corda com extremidades fixas esticada no instante $t = 0$ e com velocidade inicial $g(x) = \sin(4\pi x)$.

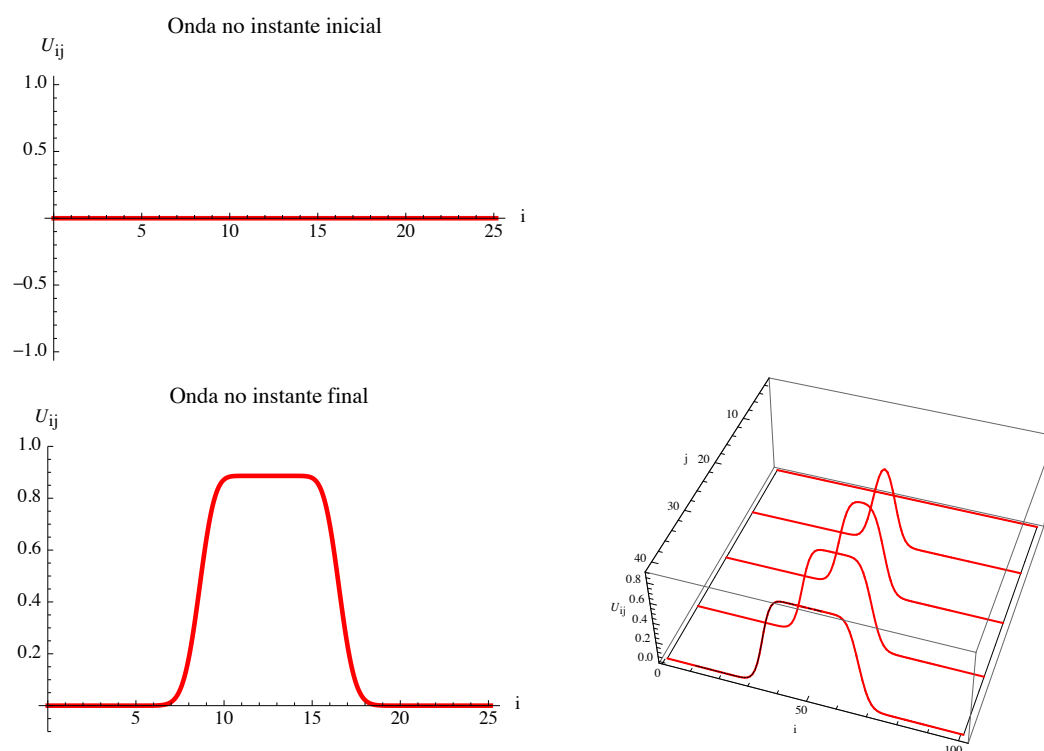


Figura 5.6: Solução para a equação de onda pelo método das diferenças finitas no caso da corda infinita com velocidade inicial. Neste caso, os erros numéricos são menos evidentes.

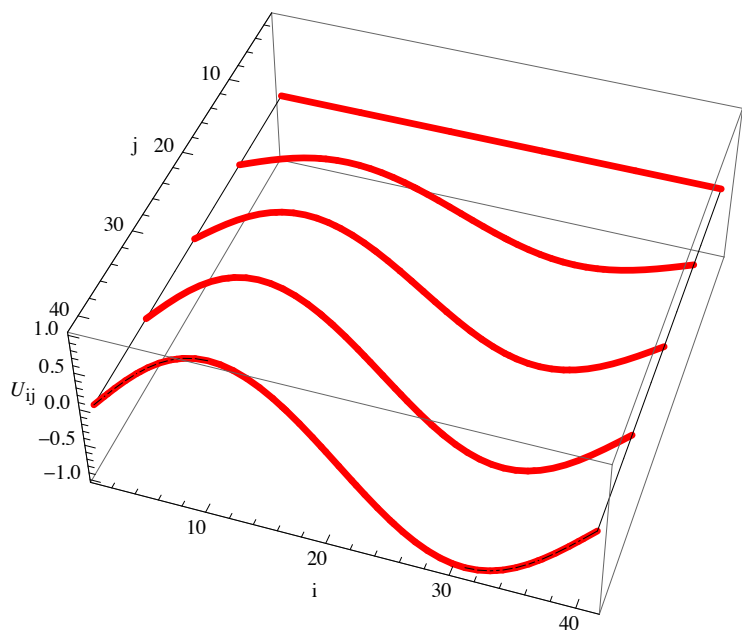


Figura 5.7: Soluções obtidas pelo método das diferenças finitas no caso da corda com extremidades fixas esticada no instante $t = 0$ e com velocidade inicial $g(x) = \text{sen}(4\pi x)$.

Capítulo 6

Conclusão

Nesta tese, apresentamos um estudo detalhado da equação de onda unidimensional e das suas soluções. Esta equação de onda cai na categoria das equações diferenciais parciais hiperbólicas com duas variáveis independentes e é dentro desta categoria, o seu exemplo mais representativo. Esta representatividade é reforçada por esta equação corresponder à forma canónica de equações diferenciais parciais de 2ª ordem em duas variáveis independentes, isto é, com mudanças de variável, podemos reduzir uma qualquer equação diferencial parcial de 2ª ordem em duas variáveis independentes e de coeficientes constantes a uma equação de onda com uma determinada velocidade c . No capítulo 2, mostramos como definir estas mudanças de variável.

As soluções da equação de onda unidimensional apresentam o comportamento típico de ondas progressivas e na situação mais geral podem ser escritas como uma combinação linear de duas ondas que se propagam em sentidos opostos com igual velocidade. Este resultado pode ser demonstrado recorrendo a vários métodos, como por exemplo, o método da separação das variáveis e a análise de Fourier. Este último é particularmente apropriado em situações mais complexas, por exemplo, quando termos de ordem inferior a dois, que podem ser interpretados como devidos a forças resistivas ou elásticas no caso da vibração de uma corda, estão presentes na equação de onda. No capítulo 3, consideramos um caso particular da equação do telégrafo cujas soluções que são também progressivas, mas que

perdem amplitude exponencialmente ao longo do tempo.

A descrição do comportamento de sistemas descritos pela equação de onda exige ainda a introdução de condições iniciais. Estas condições selecionam uma solução particular do conjunto de soluções possíveis da equação de onda e na ausência de termos de ordem inferior a dois na equação de onda, esta solução é dada pela fórmula de D'Alembert. Adicionalmente, como estes sistemas são finitos, as soluções da equação de onda unidimensional estão definidas num certo intervalo de posições e há que considerar condições de fronteira nesta situação. Utilizando o exemplo de uma corda vibrante de comprimento L , estudamos a solução da equação de onda de uma corda com extremidades fixas, livres ou na forma de anel. A fórmula de D'Alembert pode ser generalizada de modo a obter a solução da equação de onda na presença de estas condições de fronteira, utilizando o método da reflexão.

Situações mais complexas, por exemplo quando os coeficientes nas equações diferenciais parciais não são constantes, exigem a utilização de métodos numéricos para obter as soluções. Um destes métodos é o método das diferenças finitas que foi descrito no capítulo 5. Este método foi exemplificado para casos em que a situação exata é conhecida o que nos permitiu a comparação entre as soluções exatas e numéricas.

Apêndice A

Códigos do Mathematica

A.1 Caso 1: corda infinita largada do repouso

```
f[x_]:=Which[7Pi/2 ≤ x ≤ 9Pi/2, Cos[x - 4Pi]^3, True, 0]

u[x_, t_]:= (f[x + t] + f[x - t])/2

h0 = Plot[Evaluate[u[x, 0]], {x, 0, 8Pi}, PlotRange → {0, 1},
Ticks → {{0, 2Pi, 4Pi, 6Pi}, Automatic},
PlotLabel → “Onda no instante t=0”, AxesLabel → {x, u}, PlotStyle → Red];

h1 = Plot[Evaluate[u[x, 1]], {x, 0, 8Pi}, PlotRange → {0, 1},
Ticks → {{0, 2Pi, 4Pi, 6Pi}, Automatic},
PlotLabel → “Onda no instante t=1”, AxesLabel → {x, u}, PlotStyle → Red];

h2 = Plot[Evaluate[u[x, 2]], {x, 0, 8Pi}, PlotRange → {0, 1},
Ticks → {{0, 2Pi, 4Pi, 6Pi}, Automatic},
PlotLabel → “Onda no instante t=2”, AxesLabel → {x, u}, PlotStyle → Red];

h3 = Plot[Evaluate[u[x, 3]], {x, 0, 8Pi}, PlotRange → {0, 1},
Ticks → {{0, 2Pi, 4Pi, 6Pi}, Automatic},
PlotLabel → “Onda no instante t=3”, AxesLabel → {x, u}, PlotStyle → Red];

h4 = Plot[Evaluate[u[x, 4]], {x, 0, 8Pi}, PlotRange → {0, 1},
Ticks → {{0, 2Pi, 4Pi, 6Pi}, Automatic},
PlotLabel → “Onda no instante t=4”, AxesLabel → {x, u}, PlotStyle → Red];
```

```

h5 = Plot[Evaluate[u[x, 5]], {x, 0, 8Pi}, PlotRange → {0, 1},
Ticks → {{0, 2Pi, 4Pi, 6Pi}, Automatic},
PlotLabel → "Onda no instante t=5", AxesLabel → {x, u}, PlotStyle → Red];
Show[GraphicsGrid[{{h0, h1}, {h2, h3}, {h4, h5}}], FrameTicks → None]
Plot3D[u[x, t], {x, 0, 8Pi}, {t, 0, 5}, PlotPoints → 40,
AxesLabel → {x, t, "u(x,t)"}, PlotRange → {0, 1},
Ticks → {{0, 2Pi, 4Pi, 6Pi}, Automatic, Automatic}
, ColorFunction → ColorData[{"LightTemperatureMap", "Reverse"}]]

```

A.2 Caso 2: corda infinita esticada com velocidade inicial

```

u[x_, t_] := (Erf[x - 4Pi + Pi^.5t] - Erf[x - 4Pi - Pi^.5t])/4
h0 = Plot[Evaluate[u[x, 0]], {x, 0, 8Pi}, PlotRange → {0, 1},
Ticks → {{0, 2Pi, 4Pi, 6Pi}, Automatic},
PlotLabel → "Onda no instante t=0", AxesLabel → {x, u}, PlotStyle → Red];
h1 = Plot[Evaluate[u[x, 1]], {x, 0, 8Pi}, PlotRange → {0, 1},
Ticks → {{0, 2Pi, 4Pi, 6Pi}, Automatic},
PlotLabel → "Onda no instante t=1", AxesLabel → {x, u}, PlotStyle → Red];
h2 = Plot[Evaluate[u[x, 2]], {x, 0, 8Pi}, PlotRange → {0, 1},
Ticks → {{0, 2Pi, 4Pi, 6Pi}, Automatic},
PlotLabel → "Onda no instante t=2", AxesLabel → {x, u}, PlotStyle → Red];
h3 = Plot[Evaluate[u[x, 3]], {x, 0, 8Pi}, PlotRange → {0, 1},
Ticks → {{0, 2Pi, 4Pi, 6Pi}, Automatic},
PlotLabel → "Onda no instante t=3", AxesLabel → {x, u},
PlotStyle → Red];
h4 = Plot[Evaluate[u[x, 4]], {x, 0, 8Pi}, PlotRange → {0, 1},
Ticks → {{0, 2Pi, 4Pi, 6Pi}, Automatic},
PlotLabel → "Onda no instante t=4", AxesLabel → {x, u}, PlotStyle → Red];

```

```

h5 = Plot[Evaluate[u[x, 5]], {x, 0, 8Pi}, PlotRange -> {0, 1},
Ticks -> {{0, 2Pi, 4Pi, 6Pi}, Automatic},
PlotLabel -> "Onda no instante t=5", AxesLabel -> {x, u}, PlotStyle -> Red];
Show[GraphicsGrid[{{h0, h1}, {h2, h3}, {h4, h5}}], FrameTicks -> None]
Plot3D[u[x, t], {x, 0, 8Pi}, {t, 0, 5}, PlotPoints -> 40,
AxesLabel -> {x, t, "u(x,t)"}, PlotRange -> {0, 1},
Ticks -> {{0, 2Pi, 4Pi, 6Pi}, Automatic, Automatic}
, ColorFunction -> "LightTemperatureMap"]

```

A.3 Método das diferenças finitas com velocidade inicial e extremidades fixas

```

(* condições iniciais *)
f[x_]:=0; (* posição inicial *)
g[x_]:=Sin[4 * Pi * x];
(* velocidade inicial *)

(*definições*)
c = N[1/(4 * Pi)]; (*velocidade*)
l = 0.5; (* intervalo para x *)
tF = 1.5; (* intervalo para t *)
nX = 40; (* No de pontos em x *)
nX1 = nX + 1;
nT = 40; (* No de pontos em t *)
nT1 = nT + 1;
h = l/nX; (* intervalo entre pontos consecutivos no eixo dos x *)
k = tF/nT; (* intervalo entre pontos consecutivos no eixo dos t *)
r = N[c * k/h];

(*discretização*)
fi[i_]:=N[f[h * (i - 1)]]; (*x = 0correspondeai = 1*)

```

```

gi[i_]:=N[g[h*(i-1)]];

(* inicialização da matriz U *)
uN = Table[0, {nX1}, {nT1}];

(* condições iniciais *)
For[
i = 1,
i ≤ nX1,
i++,
uN[[i, 1]] = N[fi[i]] (* posição inicial *)
]

For[
i = 2, (*excluindo a extremidade x = 0 que está fixa*)
i ≤ nX, (*excluindo a extremidade x = L que está fixa*)
i++,
uN[[i, 2]] = N[(1 - r^2) * fi[i] + r^2 * (fi[i + 1] + fi[i - 1])/2 + k * gi[i]]
(*posição para t = k*)
];

(*iterações*)
For[
j = 3,
j ≤ nT1,
j++,
For[
i = 2,
i ≤ nX,
i++,
(*Print[i];*)
uN[[i, j]] =
(2 * (1 - r^2) * uN[[i, j - 1]] + r^2 * (uN[[i + 1, j - 1]] + uN[[i - 1, j - 1]]) -
uN[[i, j - 2]]/N) (* equação da onda *)
];

```

```

];
(* Corda no instante final *)
points = Table[{h * (i - 1), uN[[i, nT1]]}, {i, 1, nX1}];
ListPlot[points, Joined → True]
(* Corda em vários instantes *)
ListPlot3D[uN, ViewPoint → {3, 1, 3}, Mesh → {{1, 11, 21, 31, 41}, {0}},
PlotStyle → None, MeshStyle → {{Red, Thickness[0.01]}},
AxesLabel → {j, i, Uij}]

```

A.4 Método das diferenças finitas para a corda inicialmente em repouso

```

(* condições iniciais *)
f[x_] := Which[7Pi/2 ≤ x ≤ 9Pi/2, Cos[x - 4Pi]^3, True, 0];
(* posição inicial *)
g[x_] := 0; (* velocidade inicial *)
(* definições *)
c = N[1]; (* velocidade *)
l = 8Pi; (* intervalo para x *)
tF = 4; (* intervalo para t *)
nX = 100; (* No de pontos em x *)
nX1 = nX + 1;
nT = 40; (* No de pontos em t *)
nT1 = nT + 1;
h = l/nX; (* intervalo entre pontos consecutivos no eixo dos x *)
k = tF/nT; (* intervalo entre pontos consecutivos no eixo dos t *)
r = N[c * k/h];
(* discretização *)
fi[i_] := N[f[h * (i - 1)]]; (* x = 0 corresponde a i = 1 *)

```

```

gi[i_]:=N[g[h*(i-1)]];

(* inicialização da matriz U *)
uN = Table[0, {nX1}, {nT1}];

(* condições iniciais *)
For[
i = 1,
i ≤ nX1,
i++,
uN[[i, 1]] = N[fi[i]] (* posição inicial *)
]

For[
i = 2, (* excluindo a extremidade x = 0 que está fixa *)
i ≤ nX, (* excluindo a extremidade x = L que está fixa *)
i++,
uN[[i, 2]] = N[(1 - r^2) * fi[i] + r^2 * (fi[i + 1] + fi[i - 1])/2 + k * gi[i]]
(* posição para t = k *)
];

(* iterações *)
For[
j = 3,
j ≤ nT1,
j++,
For[
i = 2,
i ≤ nX,
i++,
(* Print[i]; *)
uN[[i, j]] =
(2 * (1 - r^2) * uN[[i, j - 1]] + r^2 * (uN[[i + 1, j - 1]] + uN[[i - 1, j - 1]]) -
uN[[i, j - 2]]/N) (* equação da onda *)
];

```



```

];

(* Corda no instante final *)
points = Table[{h * (i - 1), uN[[i, nT1]]}, {i, 1, nX1}];
h0 = ListPlot[points, Joined → True, InterpolationOrder → 2,
PlotRange → {-1, 1},
PlotLabel → Onda no instante final, AxesLabel → {i,  $U_{ij}$ },
PlotStyle → {Red, Thickness[0.01]}, ImageSize → 300];

(* Corda no instante inicial *)
points = Table[{h * (i - 1), uN[[i, 1]]}, {i, 1, nX1}];
h1 = ListPlot[points, Joined → True, PlotRange → All, InterpolationOrder → 2,
PlotRange → {-1, 1},
PlotLabel → Onda no instante inicial, AxesLabel → {i,  $U_{ij}$ },
PlotStyle → {Red, Thickness[0.01]}, ImageSize → 300];

(* Corda em vários instantes *)

```

A.5 Método das diferenças finitas para a corda com velocidade inicial

```

(* condições iniciais *)
f[x_]:=0; (* posição inicial *)
g[x_]:=Exp[-(x - 4Pi)^2];
(* velocidade inicial *)

(*definições*)
c = N[1]; (*velocidade*)
l = 8Pi; (* intervalo para x *)
tF = 4; (* intervalo para t *)
nX = 100; (* No de pontos em x *)
nX1 = nX + 1;
nT = 40; (* No de pontos em t *)

```

```

nT1 = nT + 1;
h = l/nX; (* intervalo entre pontos consecutivos no eixo dos x *)
k = tF/nT; (* intervalo entre pontos consecutivos no eixo dos t *)
r = N[c * k/h];

(*discretização*)
fi[i_]:=N[f[h * (i - 1)]]; (*x = 0correspondeai = 1*)
gi[i_]:=N[g[h * (i - 1)]];

(* inicialização da matriz U *)
uN = Table[0, {nX1}, {nT1}];

(* condições iniciais *)
For[
i = 1,
i ≤ nX1,
i++,
uN[[i, 1]] = N[fi[i]] (* posição inicial *)
]

For[
i = 2, (* excluindo a extremidade x = 0 que está fixa *)
i ≤ nX, (* excluindo a extremidade x = L que está fixa *)
i++,
uN[[i, 2]] = N[(1 - r^2) * fi[i] + r^2 * (fi[i + 1] + fi[i - 1])/2 + k * gi[i]]
(* posição para t = k *)
];

(*iterações*)
For[
j = 3,
j ≤ nT1,
j++,
For[
i = 2,
i ≤ nX,

```

```

i++,
(*Print[i];*)
uN[[i, j]] =
(2 * (1 - r^2) * uN[[i, j - 1]] + r^2 * (uN[[i + 1, j - 1]] + uN[[i - 1, j - 1]]) -
uN[[i, j - 2]])/N) (* equação da onda *)
];
];
(* Corda no instante final *)
points = Table[{h * (i - 1), uN[[i, nT1]]}, {i, 1, nX1}];
h0 = ListPlot[points, Joined → True, InterpolationOrder → 2,
PlotRange → {-1, 1},
PlotLabel → Onda no instante final, AxesLabel → {i,  $U_{ij}$ },
PlotStyle → {Red, Thickness[0.01]}, ImageSize → 300];
(* Corda no instante inicial *)
points = Table[{h * (i - 1), uN[[i, 1]]}, {i, 1, nX1}];
h1 = ListPlot[points, Joined → True, PlotRange → All, InterpolationOrder → 2,
PlotRange → {-1, 1},
PlotLabel → Onda no instante inicial, AxesLabel → {i,  $U_{ij}$ },
PlotStyle → {Red, Thickness[0.01]}, ImageSize → 300];
Show[GraphicsGrid[{{h1}, {h0}}], FrameTicks → None]
(* Corda em vários instantes *)
ListPlot3D[uN, ViewPoint → {3, 1, 3}, Mesh → {{1, 11, 21, 31, 41}, {0}},
PlotStyle → None, MeshStyle → {{Red, Thickness[0.005]}}, PlotRange → All,
AxesLabel → {j, i,  $U_{ij}$ }]
```

Apêndice B

Princípio da sobreposição

O princípio da sobreposição tem enunciados ligeiramente diferentes no caso de equações diferenciais homogêneas e equações diferenciais não homogêneas. No caso das equações diferenciais homogêneas, o princípio da sobreposição diz-nos que se u_1, u_2, \dots, u_n são soluções de uma equação diferencial parcial linear e homogênea, então a combinação linear $u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n$ também é solução dessa equação, onde c_1, c_2, \dots, c_n são constantes.

A demonstração neste caso é simples. Consideremos uma equação diferencial parcial dada por $\mathcal{L}u = 0$ onde \mathcal{L} é um operador diferencial linear. No caso particular da equação de onda, este operador é dado por

$$\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \quad (\text{B.1})$$

Suponhamos que u_1 e u_2 são duas soluções linearmente independentes da equação $\mathcal{L}u = 0$. Uma vez que o operador diferencial é linear, $\mathcal{L}(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 \mathcal{L}u_1 + c_2 \mathcal{L}u_2 = 0$. Logo $c_1 u_1 + c_2 u_2$ é também solução. A generalização para a combinação linear $u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n$ é óbvia.

No caso das equações diferenciais não homogêneas, o princípio da sobreposição diz-nos que se a equação diferencial é dada por $\mathcal{L}u = \sum_1^n c_i f_i$ e se $\mathcal{L}g_k = f_k$, então $u = \sum_1^n c_i g_i$ é solução da equação.

A demonstração é imediata escrevendo $\mathcal{L} \sum_1^n c_i g_i = \sum_1^n c_i \mathcal{L} g_i = \sum_1^n c_i f_i$. Isto é, $\sum_1^n c_i g_i$ satisfaz a equação diferencial.

Destes dois princípios resulta que se v é solução da equação $Lu = 0$ e F é solução de $\mathcal{L}u = f$, então $v + F$ também é solução de $\mathcal{L}u = f$.

Apêndice C

Método das características

Neste apêndice, discutimos o método das características que permite reduzir uma equação diferencial linear parcial de primeira ordem a uma equação ou um sistema de equações diferenciais ordinárias [4, 9, 12].

C.1 Curvas características para EDPs de 1^a ordem homogêneas

Consideremos a equação

$$A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (\text{C.1})$$

onde A e B são constantes tais que $A^2 + B^2 \neq 0$, isto é, pelo menos um dos coeficientes é diferente de zero, caso contrário seria trivial. Recorrendo ao produto escalar em \mathbb{R}^2 , podemos reescrever a equação anterior como

$$(A, B) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0,$$

isto é,

$$(A, B) \cdot \nabla u = 0,$$

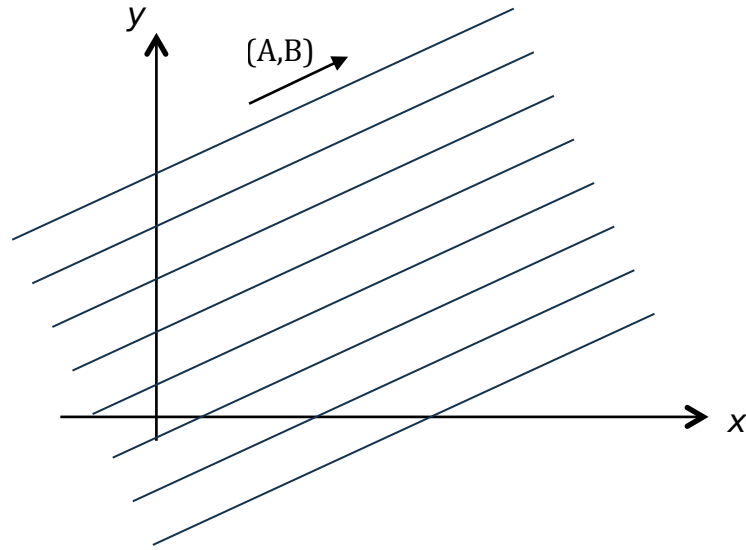


Figura C.1: Curvas características.

onde ∇u é o gradiente de u em \mathbb{R}^2 .

Definindo um vetor \mathbf{v} tal que $\mathbf{v} = (A, B)$, então o membro esquerdo da equação anterior é a derivada direcional de u na direção do vetor \mathbf{v} . Então a solução da Eq. C.1 é constante na direção do vetor \mathbf{v} .

As retas paralelas ao vetor \mathbf{v} são definidas pela equação

$$Bx - Ay = C. \quad (\text{C.2})$$

Na Eq. C.2, C é uma constante arbitrária, que define uma recta particular na família das retas paralelas (que se designam **retas da equação característica** da equação diferencial parcial). Como vimos anteriormente, $u(x, y)$ é constante na direção de \mathbf{v} , logo é também constante ao longo destas retas. A reta contendo o ponto (x, y) é determinada por $C = Bx - Ay$, desta forma u depende apenas de $Bx - Ay$, isto é,

$$u(x, y) = f(Bx - Ay), \quad (\text{C.3})$$

em que f é uma função arbitrária.

O método das características permite a redução de uma equação parcial a uma equação ordinária. Para obtermos uma equação diferencial ordinária necessitamos de eliminar uma derivada parcial da equação. Uma vez que a derivada direcional desaparece na direção do vetor (a, b) , vamos fazer uma mudança no sistema de coordenadas de forma a que o novo eixo das abcissas seja paralelo ao vetor v .

As novas coordenadas (ξ, η) são definidas a partir das projeções do vetor (x, y) segundo o vetor (A, B) e segundo o vetor $(-B, A)$ que é normal a (A, B) .

$$(\xi, \eta) = ((x, y) \cdot (A, B), (x, y) \cdot (B, -A)) = (Ax + By, Bx - Ay),$$

isto é,

$$\xi = Ax + By,$$

$$\eta = Bx - Ay.$$

Podemos reescrever a equação Eq. C.1 com estas coordenadas, pois temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ &= A \frac{\partial u}{\partial \xi} + B \frac{\partial u}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ &= B \frac{\partial u}{\partial \xi} - A \frac{\partial u}{\partial \eta}, \end{aligned}$$

o que implica que

$$\begin{aligned} A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y} &= A \left(A \frac{\partial u}{\partial \xi} + B \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + B \left(B \frac{\partial u}{\partial \xi} - A \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \\ &= (A^2 + B^2) \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0. \end{aligned}$$

Como $A^2 + B^2 \neq 0$, obtemos $\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$, uma equação diferencial ordinária.

Resolvendo esta equação, obtemos

$$u(\xi, \eta) = f(\eta),$$

e mudando para as coordenadas originais temos

$$u(x, y) = f(Bx - Ay).$$

Este método de redução de uma equação parcial a uma equação ordinária designa-se de **Método das Características** e as coordenadas (ξ, η) são as coordenadas características.

C.2 Curvas características para EDPs de 1ª ordem não homogêneas

Consideremos a equação linear de primeira ordem

$$A(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = C(x, y) \quad (\text{C.4})$$

e suponhamos que existe uma solução $u(x, y)$. Consideremos o gráfico da função dado por

$$S \equiv \{(x, y, u(x, y))\}.$$

Se u é solução de Eq. C.4, sabemos que para cada ponto (x, y)

$$(A(x, y), B(x, y), C(x, y)) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y), \frac{\partial u}{\partial y}(x, y), -1 \right) = 0. \quad (\text{C.5})$$

A normal à superfície $S = \{(x, y, u(x, y))\}$ no ponto $(x, y, u(x, y))$ é dada por $\vec{N}(x, y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y), \frac{\partial u}{\partial y}(x, y), -1 \right)$, isto é, pelo gradiente da função $u(x, y) - z$. Então o vetor

$(A(x, y), B(x, y), C(x, y))$ é perpendicular a

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y), \frac{\partial u}{\partial y}(x, y), -1 \right),$$

em cada ponto $(x, y, u(x, y))$, logo o vetor $(A(x, y), B(x, y), C(x, y))$ está no plano tangente a S .

Consequentemente para encontrar uma solução para Eq. C.4 procuramos uma superfície S tal que para cada ponto (x, y, z) de S , o vetor $(A(x, y), B(x, y), C(x, y))$ seja tangente ao plano. Começemos por procurar uma curva \mathcal{C} que esteja em S . Vamos então construir uma curva particular \mathcal{C} parametrizada por s tal que para cada ponto da curva \mathcal{C} , o vetor $(A(x(s), y(s)), B(x(s), y(s)), C(x(s), y(s)))$ é tangente à curva, isto é, a curva \mathcal{C} para além de estar contida na superfície S , também tem a orientação dada pelo vetor $(A(x(s), y(s)), B(x(s), y(s)), C(x(s), y(s)))$. Como condição adicional, a curva $\mathcal{C} = \{x(s), y(s), z(s)\}$ satisfaz o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= A(x(s), y(s)), \\ \frac{dy}{ds} &= B(x(s), y(s)), \\ \frac{dz}{ds} &= C(x(s), y(s)). \end{aligned} \tag{C.6}$$

a constante de proporcionalidade entre os dois vetores é um. Esta curva é conhecida como a curva integral para o campo vetorial $(A(x, y), B(x, y), C(x, y))$.

Numa equação diferencial parcial da forma Eq. C.4, procuramos as curvas integrais para o campo $V = (A(x, y), B(x, y), C(x, y))$ associado à equação diferencial parcial. Estas curvas integrais são as curvas características da Eq. C.4. Estas curvas características obtêm-se resolvendo o sistema dado na Eq. C.6. Este conjunto de equações é denominado por conjunto das equações características para Eq. C.4. Uma vez encontradas as curvas características para a Eq. C.4, pretendemos encontrar a solução para esta equação, construindo uma superfície S resultante da união destas curvas que se designa por superfície integral. Resolvendo o conjunto das equações características e eliminando destas soluções

a variável s , iremos obter uma solução $u(x, y) = z(x, y) = f(\eta(x, y))$, onde por exemplo, podemos ter $\eta = x - y$. Desta forma, efetivamente reduzimos a nossa equação parcial diferencial a um sistema de equações diferenciais ordinárias.

Bibliografia

- [1] M.L. Abell e J.P. Braselton, *Differential Equations with Mathematica*, Elsevier Science, 2004.
- [2] N.H. Asmar, *Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems*, Pearson Education, Limited, 2010.
- [3] J. D'Alembert, "Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration", em: *Mem. Acad. Sci. Berlin* 3 (1747), pp. 214–219.
- [4] L. Debnath, *Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, Birkhäuser Boston, 2012.
- [5] Joel Feldman, *Apontamentos "Using the Fourier Transform to Solve PDEs"*, Department of Mathematics University of British Columbia.
- [6] Diego Staub Felipe, *Apontamentos "Problemas de transmissão e óptica geométrica"*, Universidade Federal de Santa Catarina, 2009.
- [7] Michael Forger, *Apontamentos "Equações Diferenciais Parciais"*, 2012.
- [8] Mark S. Gockenbach, *Partial Differential Equations: Analytical and Numerical Methods*, Society for Industrial e Applied Mathematics, 2002.
- [9] Viktor Grigoryan, *Apontamentos "Partial Differential Equations"*, Department of Mathematics, University of California, Santa Barbara, 2010.
- [10] Michiel Hazewinkel, *Encyclopedia of Mathematics*, ed. por Springer.

- [11] Stepan A Tersian Ioannis P Stavroulakis, *Partial Differential Equations: An Introduction with Mathematica and Maple*, Word Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2004.
- [12] P.K. Kythe, P. Puri e M.R. Schäferkotter, *Partial differential equations and Mathematica*, CRC Press, 1997.
- [13] Julie Levandosky, *Apontamentos "Partial Differential Equations of Applied Mathematics"*, University of Stanford, 2002.
- [14] Paulo Cupertino de Lima, *Apontamentos "Equações Diferenciais B"*, Universidade Federal de Minas Gerais.
- [15] Kelly Jacqueline Moura de Melo, *Apontamentos "Aplicação do método das diferenças finitas explícito na solução da equação do calor para o caso transiente e unidimensional"*, Universidade Federal Rural do Semi-Árido Campos Angicos, 2011.
- [16] I. Shingareva e C. Lizárraga-Celaya, *Solving Nonlinear Partial Differential Equations with Maple and Mathematica*, Springer Wien, New York, 2011.
- [17] M. Spiegel, *Schaum's Outline of Fourier Analysis with Applications to Boundary Value Problems*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Education, 1974.
- [18] I.P. Stavroulakis e S.A. Tersian, *Partial Differential Equations: An Introduction With Mathematica and Maple*, World Scientific Publishing Company Incorporated, 2004.